

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5-6

Príklad M1: Paľo krája koláč. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková*

Predpokladom na správne vyriešenie príkladu bolo pozorné prečítanie a pochopenie zadania. Prejdime si dôležité fakty:

1. Paľo chce rozdeliť koláč na 8 častí. Teda nestačí rozdeliť koláč na 6 častí, aj keď niektoré budú dvakrát väčšie.
2. Koláč môže rezať len rovnými rezmi. Preto rezy nesmú byť kruhové a ani nesmie počas rezania meniť smer.
3. V zadaní nikde nie je podmienka, že časti koláča musia byť rovnako veľké a ani že rezy musia viesť stredom koláča.

Keď sme si ujasnili fakty, môžeme sa do toho pustiť.

Prvým rezom, nech ho už Paľo vedie akokoľvek, vždy rozdelí koláč na 2 časti (Obr. 1).

Pri druhom reze má dve možnosti. Buď prejde križom cez prvý rez (Obr. 2), alebo nie (Obr. 3). Vidíme, že takto môžu vzniknúť 4 alebo 3 časti. Keďže Paľovým cieľom je až 8 častí, bude rezať križom a rozdelí koláč zatiaľ na 4 časti.

Pri treťom reze je podstatná informácia, že akokoľvek časťou koláča rez prechádza, vždy ju rozdelí na 2 časti, teda vznikne 1 časť navyše. Keďže Paľo potrebuje získať ešte ďalšie 4 časti, tak musí rez viesť všetkými časťami koláča. To sa ale nedá bez toho, aby nebol nejakým spôsobom krivý. Keby sme chceli byť úplne presní, tak tretí rovný rez môže prejsť cez predchádzajúce dva rezy maximálne dvakrát, cez každý raz (lebo úsečka pretne inú úsečku najviac raz), takže vlastne prejde maximálne tromi časťami koláča. Takto vzniknú dodatočné tri časti.

Teda vidíme, že tromi rezmi vie Paľo rozdeliť koláč na najviac 7 častí. Spraviť osem častí sa mu istotne nepodarí.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Bodovanie: tvrdenie, že sa to nedá – 1b.; tvrdenie, že maximálny počet častí je 7 – 1b.; ostatné body som pridelovala za zdôvodnenia.

Príklad M2: Prechod chodbou. *Opravovala Lucie „Klávesnica“ Křemenová*

Chápem, že občas je ťažké zapísať postup riešenia, keď výsledok je temer očividný, ale bez postupu nie je isté, či ste príklad riešili sami, alebo len využili kamaráta či kamarátku.

Zhrňme si ešte raz podmienky popísané v zadaní:

- deti šli po jednom;
- Rašto a Paľo neboli pri sebe;

- Rasťo išiel pred Kamilou a Marek za ňou;
- Slávka nešla pri Rasťovi, Paľovi ani Slávke;

Jediné, čo teda presne vieme o poradí, je „Rasťo – Kamila – Marek“. Tým začneme. Ďalej sa zameriame na Slávku. Tá podľa zadania mohla ísť jedine za Marekom keďže on mal miesto za Rasťom a Kamilou isté a ona mohla ísť jedine v jeho blízkosti. Čiže máme zoradené 4 deti z 5. Ostáva Paľo. Ten, nebyť toho že sa s Rasťom pohádal, by mal 3 možné pozície. Keďže ale nemohol byť tesne vedľa Rasťa, jediné miesto mu ostávalo medzi Kamilou a Marekom.

Deti teda vošli v poradí Rasťo, Kamila, Paľo, Marek a nakoniec Slávka.

Bodovanie: 5bodov za kompletne vysvetlenie, 1bod za riešenie bez ničoho. Akýkoľvek pokus o vysvetlenie za čiastkové body zo 4.

Príklad M3: Záhada na stene. Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský

Vašou úlohou bolo nájsť prirodzené číslo (to sú všetky celé, kladné čísla: 1,2,3, ...), ktoré je 9x väčšie ako jeho ciferný súčet. Je teda dobré vedieť, čo to ten ciferný súčet vlastne je. Ako jednoduchý príklad môžem uviesť číslo 10384, ktorého ciferný súčet vypočítame tak, že spočítame jeho jednotlivé cifry, teda $1+0+3+8+4=16$.

Keď teraz vieme, čo je to ten ciferný súčet, môžeme sa pohnúť ďalej. Aby bolo nejaké číslo 9x väčšie ako iné, musí byť logicky deliteľné 9. Poďme sa teda pozrieť na násobky čísla 9 a ich ciferné súčty: 9(9), 18(9), 27(9), 36(9), ... 90(9), 99(18), 108(9), Vidíme, že násobky čísla 9 majú ciferný súčet najskôr 9, potom zrazu jedno číslo má 18, potom opäť 9 a keby som tu vypísal tých čísiel oveľa viac, zistili by sme, že všetky násobky 9, majú ciferné súčty buď 9, alebo 18, alebo 27 a pre väčšie čísla postupne 36, 45, 54 ... (opätovne násobky 9). Aj preto existuje jednoduché pravidlo, podľa ktorého sa dá zistiť, či je číslo deliteľné deviatimi: ak je ciferný súčet daného čísla deliteľný 9, tak aj číslo samotné je deliteľné 9. Takže sme práve zistili, že ciferné súčty ktoré môžu nastať, sú 9, 18, 27, 36, ... a teda už len potrebujeme zistiť, či keď tieto ciferné súčty prenásobíme 9 dostaneme číslo s rovnakým ciferným súčtom, aký sme predtým násobili.

Vezmime teda	9	=> $9*9 = 81$ a 81(má ciferný súčet 9) a teda vyhovuje riešeniu.
	18	=> $18*9 = 162$ a 162(má ciferný súčet 9) a teda nevyhovuje.
	27	=> $27*9 = 243$ a 243(má ciferný súčet 9) a teda nevyhovuje.
	36	=> $36*9 = 324$ a 324(má ciferný súčet 9) a teda nevyhovuje.

No ale pozrime sa, aké najmenšie číslo existuje, ktoré má ciferný súčet 27? No predsa 999. Ale toto číslo je o dosť väčšie ako 243. A keby sme vzali číslo s ciferným súčtom 36? To by muselo byť najmenej 9999 a to už je omnoho viac ako 324. Z tohto pozorovania je teda jasné, že jedine číslo 81 mohlo byť napísané na stene, pretože číslo s väčším ciferným súčtom je oveľa väčšie ako len 9-násobok jeho ciferného súčtu.

A teda jediné prirodzené číslo, ktoré je 9x väčšie ako jeho ciferný súčet je 81.

Bodovanie: 2b za výsledok bez odôvodnenia, 3b za nie úplný postup, 5b muselo obsahovať už aj odôvodnenie, prečo neexistuje väčšie číslo.

Príklad M4: Cukríky. Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová

Postupne ukážeme, že správne riešenie je 6 cukríkov v zložení farieb 2+2+2.

Predstavme si najprv, že z niektorej farby sú vo vrecúšku viac ako 4 cukríky – stačí teda, aby si Slávka vytiahla cukríky tejto farby, a pretože takýchto cukríkov je aspoň 5, nebude pravda, že vytiahne z každej farby aspoň jeden cukrík.

Ak by z niektorej farby boli vo vrecúšku práve 4 cukríky, potom by stačilo, aby Slávka vytiahla tieto 4 a ešte jeden hocijaký iný, a stále nebude pravda, že vytiahne z každej farby aspoň jeden cukrík.

Takže je jasné, že z niektorej farby môžu byť najviac 3 cukríky. Nech niektorá farba cukríkov – napríklad modrá – je zastúpená 3-ma cukríkmi. Potom by však z ostatných farieb nesmela byť ani jedna taká, že vo vrecúšku sú dva cukríky tejto farby. Stačilo by totiž, aby Slávka vytiahla tieto 2 cukríky a k tomu 3 cukríky modrej farby a opäť nebude pravda, že vytiahne z každej farby aspoň jeden cukrík. Dokopy by teda vo vrecúšku mohli byť najviac $3+1+1 = 5$ cukríkov. Čo je menej ako 6 !

A máme výsledok – z každej farby môžu byť najviac 2 cukríky, ak chceme dosiahnuť väčší počet cukríkov ako 5. Teda riešením je $2+2+2 = 6$ cukríkov vo vrecúšku.

Bodovanie:

1 bod – uvedený len výsledok 6 cukríkov (bez obmedzenia na kombináciu farieb 2+2+2)

2 body – len výsledok 6 cukríkov v kombinácii 2+2+2

3-4 body – výsledok 6 cukríkov s neúplným postupom (vylúčenie väčšieho postu ako 6, príp. vylúčenie iných farebných kombinácií pre 6 cukríkov).

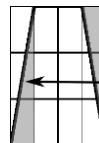
Príklad M5: Maska. Opravoval Samuel „Samo“ Cibulka

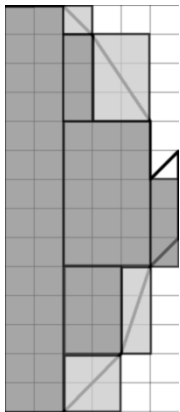
Zadanie hovorí, že dierka na nos má 18 cm^2 . To znamená, že jeden štvorček nebude mať 1 cm^2 , ako si niektorí z vás mysleli. Poďme si teda vypočítať, aký je veľký jeden štvorček. Dá sa to spraviť viacerými spôsobmi, buď sa dá použiť vzorec na výpočet obsahu lichobežníka (tí čo ho poznajú), alebo môžem spraviť malú fintu. Môžem presunúť trojuholník, čo je vpravo vedľa nosa doľava. Tým pádom mi vzniknú dva obdĺžniky, z ktorých jeden bude mať obsah nosa a druhý bude mať obsah okolia nosa. Ja chcem vedieť, aký je veľký nos, spočítam teda jeho obsah ($S = 3 \times 1,5 = 4,5$ štvorčeka). Ale tiež viem, že má 18 cm^2 . Teraz už viem vypočítať, koľko má jeden štvorček:

$$4,5 \text{ štvorčeka} = 18 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ štvorček} = 18 : 4,5 = 4 \text{ cm}^2$$

Toto bol len jeden z postupov, ako sa to dalo vyrátať (mohli ste ešte zrátať obsahy trojuholníkov na krajoch, rozdeliť si nos na 6 trojuholníkov, alebo presúvať a otáčať celú jeho polku). Samozrejme uznané boli všetky správne riešenia, ktoré viedli k tomuto výsledku. Teraz potrebujeme spočítať všetky štvorčeky, ktoré sú v maske, ale bez otvorov. To ste mohli spraviť v podstate tromi spôsobmi. Všetky sú správne, ja ukážem riešenie jedným z nich.

- Najskôr spočítam, koľko má samotná maska s očami, ústami, nosom, ktoré potom odrátam. Je dobré si uvedomiť, že celá maska je osovo súmerná (to znamená, že jej ľavá polovica je rovnaká ako pravá, len zrkadlovo otočená), teda stačí vyrátať obsah jednej z





polovic. Jednu polku sa dá rozdeliť na obdĺžniky a pravouhlé trojuholníky (z ucha si spravím obdĺžnik tým, že presuniem trojuholník z jeho vrchu nadol). Všetky tmavé obdĺžniky na obrázku sú v celej maske dvakrát (aj na ľavej polke). A takisto všetky trojuholníky. Dajú sa teda doplniť na svetlé obdĺžniky a tie zarátam len raz (keďže sú dvakrát také veľké, ako samotný trojuholník). Zostali už len samé obdĺžniky, takže netreba poznať ani vzorec na výpočet obsahu trojuholníka a viem to vyrátať. Spočítam všetky tmavé obdĺžniky: $2 \cdot 14 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 28 + 3 + 15 + 6 + 3 = 55$ štvorcíkov.

Vynásobím ich dvomi, aby som zarátal aj druhú stranu a dostanem 110 štvorcíkov. Teraz pripočítam svetlé obdĺžniky: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 1 + 6 + 3 + 4 = 14$ štvorcíkov.

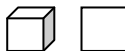
Dokopy mám $110 + 14 = 124$ štvorcíkov. Teraz odpočítam oči, nos a ústa. Keď sa pozriem na jedno oko, vidím, že sa skladá zo štyroch polovic štvorcíka. Dokopy má teda jedno oko 2 štvorcíky a dve oči majú 4 štvorcíky. Nos, ako sme už vyššie vyrátali, má 4,5 štvorcíka. A ústa sa skladajú zo 4 celých štvorcíkov a 4 polovic. Dokopy teda majú 6 štvorcíkov. Keď toto všetko odrátam od 124 štvorcíkov, dostanem: $124 - 4 - 4,5 - 6 = 109,5$ štvorcíka.

- Spočítam štvorcíky na celom obrázku ($12 \times 14 = 168$ štvorcíkov), potom odrátam okraje, ktoré nepatria maske (hore 22 štvorcíkov aj dole 22 štvorcíkov) a nakoniec oči (4 štvorcíky), ústa (6 štvorcíkov) a nos (4,5 štvorcíka). Výsledok bude: $168 - 22 - 22 - 4 - 6 - 4,5 = 109,5$ štvorcíka.

- Môžem spočítať aj rovno koľko má maska bez očí, úst a nosa. Rozdelím si to na trojuholníky (na čele so stranami 2 a 3, vedľa nosa – vieme že je to 1,5 štvorcíka a pri ústach so stranami 1 a 3), celé štvorcíky a pološtvorcíky. Pri tomto postupe sa však maska nedá pekne rozdeliť na väčšie obdĺžniky, takže je to viac-menej len počítanie štvorcíkov (tých bolo 88), pološtvorcíkov (bolo ich 22) a tých trojuholníkov, ktoré nevieme rozdeliť. Celkovo je to potom: $88 + 22 : 2 + 2 \cdot (2 \cdot 3) : 2 + 1,5 + 2 \cdot (1 \cdot 3) : 2 = 88 + 11 + 6 + 1,5 + 3 = 109,5$ štvorcíka. Týmto spôsobom sa však môžem veľmi jednoducho pomýliť, keďže musím zrátat veľké množstvo malých štvorcíkov.

Naozaj, všetkými tromi spôsobmi sme zistili, že maska bez očí, nosa a úst má 109,5 štvorcíka. A keďže sme už vypočítali, akú má plochu zaberá jeden štvorcík, hneď dostaneme výsledok a to: $109,5 \times 4 = 438 \text{ cm}^2$.

P.S.: Nemýľte si kocku a štvorec.



Bodovanie: 1,5b za výsledok; 1b za ukázanie, že 1 štvorcík je 4 cm^2 ; 2,5b za postup



organizátor korešpondenčného seminára Pikomat



AGENTÚRA
NA PODPORU
VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. LPP-0375-09