Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5-6

Príklad M1: Prívesok. *Opravoval Martin „Panda" Svetlík.*

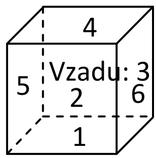
Keď sa niekto na kocku pozerá tak, že vidí 3 steny naraz, musia to byť 3 steny, ktoré majú spoločný vrchol. Inak by totiž dve z nich museli byť oproti sebe, a to by ich určite nevidel naraz. Namiesto pomenovania stien „stena s číslom 1" a podobne, budem hovoriť len „stena 1".

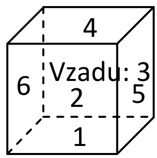
Pozrime sa, aké trojice mohli deti vidieť, keď videli súčty 9, 9 a 13. Na súčet 9 máme tri možnosti a na súčet 13 dve (tabuľka).

Súčet 9	**Súčet 13**
1,2,6	6,5,2
1,3,5	6,4,3
2,3,4	

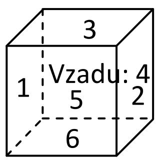
Teraz musíme zistiť, či sa dajú tieto kombinácie rozmiestniť na kocku tak, aby naozaj Rasťo, Slávka a Marek videli súčty 9, 9 a 13. Pôjdeme na to tak, že zoberieme dve kombinácie pre súčet 9 (ktoré vidia Rasťo a Slávka) a zistíme, ktorú kombináciu so súčtom 13 vtedy vidí Marek.

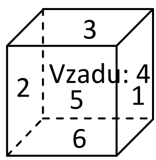
Prvý prípad – Rasťo a Slávka vidia trojice 1,2,6 a 1,3,5. Obaja vidia jednotku a každý z nich vidí iné zvyšné dve steny. Teda stena 1 musí susediť so všetkými štyrmi stenami 2,3,5,6, a tým pádom pre stenu 4 ostáva miesto len oproti stene 1 (umiestnime ich napríklad hore a dole – je jedno, ako kocku otočíme). Čo môže v tomto prípade vidieť Marek? Treba si uvedomiť, že <u>určite vidí buď hornú, alebo dolnú stenu</u> (teda buď 1, alebo 4). V kombinácii 6,5,2 nie je ani jedna z nich, teda túto trojicu vidieť nemôže (zamyslite sa, kde sú 2,5,6 – sú dookola kocky, takže niektoré dve z nich sú oproti sebe a naozaj ich nemôže vidieť naraz). Trojicu 6,4,3 môže vidieť – 4 je hore alebo dole a 3 a 6 sú veľa seba na niektorých bočných stenách (predná, zadná, pravá, ľavá). Teraz to dáme celé dokopy: 3 je vedľa 6 (aby ich Marek videl naraz), 6 je vedľa 2 a 3 je vedľa 5 (aby ich Rasťo a Slávka mohli vidieť naraz). Teda tieto štyri steny sú dookola v poradí 2,6,3,5 alebo 2,5,3,6 – to nie je otočenie tej istej kocky, to sú dve rôzne kocky.





Druhý prípad (robíme principiálne to isté, len s inými číslami, takže to zrýchlime) – Rasťo a Slávka vidia 1,3,5 a 2,3,4. Obaja vidia 3, takže okolo nej sú 1,2,4,5 a oproti nej je 6. Marek nemôže vidieť 6,4,3, lebo 6 a 3 sú oproti sebe. Keď vidí Marek 6,5,2, tak 5 a 2 sú vedľa seba. Potom z toho, čo vidia Rasťo a Slávka, vieme, že 2 a 4 sú vedľa seba a 1 a 5 sú vedľa seba. Takže nech je 3 hore, 6 dole, a okolo máme zase dve možnosti – 5,2,4,1 a 5,1,4,2.





Tretí prípad – Rasťo a Slávka vidia 1,2,6 a 2,3,4. Obaja vidia 2, takže okolo nej sú 1,3,4,6 a oproti nej je 5. Čo môže vidieť Marek? Keďže steny 5 a 2 sú oproti sebe, Marek musí vidieť jednu z nich, ale nemôže vidieť obe naraz. To je problém pre 6,5,2 aj pre 6,4,3. Teda takýto prípad nemôže nastať.

Spolu sú teda 4 môžné rozmiestnenia čísel na prívesku – kocke (odhliadnuc od toho, že ešte každú z týchto kociek môžeme rôzne otáčať).

Bodovanie:
nájdenie možností pre jednotlivé súčty – 1b.;
preskúmanie jedného prípadu, ukázanie systému a nájdenie jednej možnosti – 2b.;
preskúmanie zvyšných prípadov – 1,5b.;
nájdenie zrkadlových možností – 0,5b.

Príklad M2: Drina. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

Ako prvú veľmi dôležitú vec bolo treba zistiť, koľko polien vlastne mali chlapci odnosiť. Túto informáciu získame veľmi ľahko z ich pracovného plánu. Chceli za týždeň (7 dní) preniesť každý deň 13 polien, čo dokopy robí 7·13 = <u>91 polien</u>.

Za prvé 3 dni odniesli dokopy 7+10+12 = 29 polien, no keďže to bolo pod plán, rozhodli sa, že každý ďalší deň odnesú aspoň o 1 polienko viac ako predošlý. Keď chceme zistiť, koľko najmenej polienok mohli ponosiť v sobotu, budeme pridávať každý nasledujúci deň čo najmenšie množstvo, aby sme minimalizovali náklad na sobotu. To znamená vo štvrtok 13 (lebo v stredu 12), v piatok 14 a v sobotu 15 polien. Menej nemohli, lebo by nedodržali svoje pravidlo o zvyšovaní počtu polien každý deň.

Ako je to s maximálnym počtom? Aby chlapcom v sobotu ostalo na prenesenie čo najviac polienok, musia sa až do piatku čo najviac flákať. To je podobné, ako v prvej časti úlohy, kedy chlapci nosili čo najmenší počet polienok. Čiže ak vo štvrtok vzali 13 a v piatok 14, na sobotu a nedeľu im ostalo spolu 35 polienok. Tieto polienka si ešte musia rozdeliť tak, aby mohli v nedeľu vziať viac ako v sobotu, ale aby v sobotu zobrali čo najviac. Číslo 35 vieme rozdeliť na 17 v sobotu a 18 v nedeľu.

Odpoveď teda je, že **chlapci mohli v sobotu ponosiť najmenej 15 a najviac 17 polien**.

Bodovanie:
zistenie celkového počtu polienok – 1b.;
výsledky 15 a 17 – 1b.;
slovné vysvetlenie postupu a výsledkov – 3b.

Príklad M3: Zábavka. *Opravovala Veronika „Nika" Jankovičová.*

Číslo, ktoré napísala Kamila, si označíme ABCD. Slávka ho opísala odzadu, čiže DCBA. Zo zadania tiež vieme, že cifry A, B, C, D musia byť rôzne. Poďme sa teda pozrieť, aký najväčší a aký najmenší 5-ciferný súčet ABCD+DCBA sa dá dosiahnuť.

Najprv si všimnime jedno drobné zjednodušenie. Pri takomto sčítavaní pod sebou

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ + & D & C & B & A \\ \hline ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

<u>nám úplne stačí poznať iba dve veci: **súčet A+D** a **súčet B+C**</u> – pretože každý sa dvakrát zopakuje a nikdy sa navzájom nemiešajú. Konkrétne rozmiestnenia cifier v rámci týchto dvojíc už pre nás vôbec nie sú zaujímavé. Teraz k samotnej úlohe.

Aby bol súčet <u>čo najväčší</u> (vtedy bude určite aj 5-ciferný), musia byť v oboch sčítancoch cifry na miestach tisícok čo najväčšie. Na miesta A a D preto zvolíme najväčšie cifry – 9 a 8 (je jedno, ktorú dáme kam). Po tisíckach sú druhé najdôležitejšie miesta stoviek, preto na miesta B a C doplníme druhé najväčšie cifry – 7 a 6 (opäť je jedno, ktorú dáme kam). Ostáva nám už iba sčítať 9678+8769 = 18447. **Najväčší dosiahnuteľný súčet je 18447**.

Ako to bude s <u>najmenším</u> súčtom? Aby bol 5-ciferný, ale zároveň čo najmenší, mal by mať tvar ABCD+DCBA = 10_ _ _. To sa dá dosiahnuť dvoma spôsobmi: buď bude súčet A+D rovný 9 a *musíme* z predošlého sčítania B+C prenášať jednotku; alebo bude súčet A+D rovný 10, ale *nesmieme* prenášať jednotku.

<u>1. Možnosť A+D=10</u>:

Vďaka A+D=10 už máme zaručené, že výsledok bude 5-ciferný, a tak nás ďalej zaujíma už len to, aby bol čo najmenší. Preto za B+C zvolíme najmenšie možné cifry – 0 a 1 (je jedno, ktorú dáme kam). Súčet A+D=10 potom môžeme dosiahnuť akýmkoľvek spôsobom (2+8, 3+7 alebo 4+6) – na tom nezáleží. Sčítaním dostávame výsledný súčet 10120.

<u>2. Možnosť A+D=9</u>:

Aby bol výsledok 5-ciferný, musíme ku A+D=9 ešte preniesť jednotku z predošlého sčítania. Preto musí byť súčet B+C väčší ako 9. Zároveň však chceme všetko čo najmenšie, takže bude B+C=10. Keďže na konkrétnom rozmiestnení cifier už nezáleží (výsledný súčet bude vždy rovnaký), napíšem iba jednu z viacerých možností: 2467+7642 = 10109.

Nakoniec porovnáme výsledky oboch možností a vyberieme ten menší. Takže **najmenším možným 5-ciferným súčtom je 10109**.

<u>Bodovanie</u>:

najväčší súčet 18447 – 1b.;
najmenší súčet 10109 – 1b.;
vysvetlenie k najväčšiemu súčtu – 1,5b.;
vysvetlenie k najmenšiemu súčtu – 1,5b.

<u>**Príklad M4: Kôpky.** *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková*</u>.

Najprv si spočítame súčet všetkých čísel na guličkách: 10+4+15+4+19+6+3+11=72. Teraz skúsime postupne pre každého hráča zistiť, pri akých rozdeleniach guličiek môže vyhrať.

<u>Prvý z dvojičiek</u> vyhrá, ak budú všetky guličky v dvoch kôpkach s rovnakým súčtom. Teda v každej kôpke bude súčet čísel na guličkách 72:2 = **36**. Poďme postupne vytvárať kôpky s týmto súčtom, pričom budeme postupovať od najväčšieho čísla po najmenšie. Dve najväčšie čísla sú 19 a 15. Keby sme ich dali na jednu kôpku, do súčtu 36 by im chýbalo už len 2. To sa však nedá, pretože na zvyšných guličkách je najmenšie číslo 3. Preto 19 a 15 nemôžu byť spolu.

Ďalej máme číslo 11. Skúsme ho najprv priradiť do prvej kôpky k číslu 19: máme **kôpka 1 (19,11)**, **kôpka 2 (15)**. V prvej kôpke nám do súčtu 36 chýba len 6. To sa dá zo zvyšných čísel doplniť iba jediným spôsobom – pridaním guličky 6. Prvá výherná kombinácia by teda bola: **<u>kôpka 1 (19,11,6)</u>, <u>kôpka 2 (15,10,4,4,3)</u>**. Všimnime si, že druhá kôpka vždy automaticky vznikne doplnením zvyšných guličiek.

Ale čo ak by gulička s číslom 11 bola na druhej kôpke s číslom 15? Mali by sme: **kôpka 1 (19)**, **kôpka 2 (15,11)**. V druhej kôpke do súčtu 36 chýba už len 10, pričom nám zostali guličky 10, 6, 4, 4, 3. Po pozornom prezretí vidíme, že na vytvorenie súčtu 10 máme len dve možnosti: 10 alebo 6+4. Takto sme získali ďalšie dve výherné kombinácie: **kôpka 1 (19,6,4,4,3), kôpka 2 (15,11,10)** a **kôpka 1 (19,10,4,3), kôpka 2 (15,11,6,4)**. Keďže sme postupovali systematicky, môžeme vyhlásiť, že viac výherných kombinácií pre prvého z dvojičiek už neexistuje.

Druhý z dvojičiek vyhrá, ak budú všetky guličky v troch kôpkach s rovnakým súčtom. Teda v každej kôpke bude súčet čísel na guličkách 72:3=24. Zaujímavá je pre nás gulička s číslom 19. Do súčtu 24 jej chýba 5. No so zostávajúcimi guličkami 15, 11, 10, 6, 4, 4, 3 sa číslo 5 už doplniť nedá. Preto **druhý z dvojičiek nemá šancu vyhrať**.

Paľo vyhrá, ak budú všetky guličky v štyroch kôpkach s rovnakým súčtom. Teda v každej kôpke musí byť súčet čísel na guličkách 72:4=18. Medzi guličkami je však aj číslo 19, ktoré je už samo väčšie ako 18. Preto ani **Paľo nemá šancu na výhru**.

Bodovanie:

šanca na výhru a kombinácie pre prvého z dvojičiek – 2,5b.;
prečo nemôže vyhrať druhý z dvojičiek – 1,5b.;
prečo nemôže vyhrať Paľo – 1b.

Príklad M5: Hodinky. *Opravovala Zuzana „Bumerang“ Bogárová.*

Hodinky ukazujú iba hodiny a minúty, takže najkratší časový úsek, ktorý nimi vieme odmerať, je jedna minúta. To znamená, že keď spočítame počet prípadov, kedy je na displeji trojka, dostaneme počet minút, kedy by Paľo stál na jednej nohe.

Pozrime sa najskôr na trojky na mieste hodín. V čísle, ktoré vyjadruje hodiny, trojka buď celú hodinu svieti, alebo celú hodinu nesvieti. Zjaví sa o 03., 13. a 23. hodine, takže Paľo by na jednej nohe určite stál aspoň tieto tri hodiny.

Teraz sa pozrime na trojky na mieste minút. Počas každej hodiny sa trojka zjaví v týchto minútach: 03, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, spolu 15-krát. To znamená, že okrem troch celých hodín by Paľo ešte z každej ostatnej hodiny musel stáť na jednej nohe 15 minút.

Keďže deň má 24 hodín, takýchto hodín by bolo 21. Dovedna to znamená $21 \cdot 15 = 315$ minút. Po pričítaní celých troch hodín: $315 + (3 \cdot 60) = 495$ minút. Takže **Paľo by musel na jednej nohe stáť spolu 8 hodín a 15 minút**. Nepríjemné...

Bodovanie:

za úvahu, že medzi 13:00 a 14:00 ubehne len 59 minút – mínus 1b.;
za úvahu, že celkový čas pozerania na hodinky je 23 hodín – mínus 1b.;
za zlé spočítanie výsledného času – mínus 1b.

P-MAT n.o.®

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.