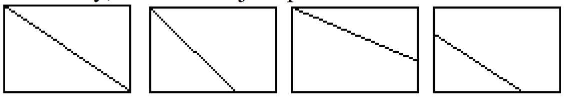
PIKOMAT
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 5-6

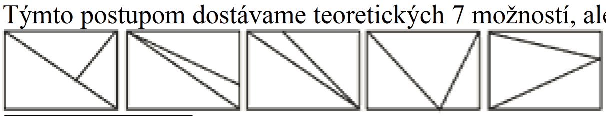
Príklad M1: opravovala Alenka Kovárová

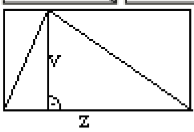
Aby sme obdĺžnik rozdelili na tri trojuholníky, je jasné, že roh aspoň jedného trojuholníka bude totožný s rohom obdĺžnika (ak by to tak nebolo, vzniklo by nám viac trojuholníkov). To sa dá urobiť štyrmi spôsobmi, z toho jeden je nevhodný, lebo ostávajúci päťuholník nevieme rozdeliť na dva trojuholníky:



Poznámka: Otočené a zrkadlové obrazy nás v tomto prípade nebudú zaujímať, je jednoduché si ich domyslieť. Všetky obrázky sú len schematické.
Štvoruholník vieme rozdeliť na dva trojuholníky dvoma spôsobmi a trojuholník na dva trojuholníky principiálne troma spôsobmi (pri trojuholníku začíname v jednom z vrcholov a končíme hocikde na náprotivnej strane), čo vidno na obrázkoch:

Týmto postupom dostávame teoretických 7 možností, ale dve sú v podstate rovnaké, takže iba 5.

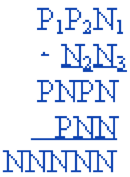




Pretože plocha jedného z trojuholníkov (ďalej len P1) je polovica plochy zo zvyšných dvoch trojuholníkov (P2 a P3), tak 2 . P1 = P2 + P3. Tiež vieme, žeP1 + P2 + P3 = PO (plocha obdĺžnika). Z týchto dvoch poznatkov dospejeme k tomu, že P1 = tretina PO. Ak označíme strany nášho obdĺžnika m a n, tak jeho obsah je m . n, teda P1 = m . n / 3. Vidíme, že vždy ten najväčší trojuholník (nech je to ten P2) má obsah rovný polovici obsahu obdĺžnika, teda P2 = m . n / 2 (ak ti to nie je zrejmé, skús si prečítať nižší odstavec). Nakoniec P3 = PO - P1 - P2, z čoho nám vyjde, že P3 = m . n / 6. Pretože nie je zrejmé, ktorý z trojuholníkov je ten tretinový a ktorý šestinový, sú vlastne vždy dve možnosti (dokopy teda 10), z nich opäť dve sú v podstate rovnaké. Výsledok: Existuje 8 rôznych rozdelení obdĺžnikového papiera vyhovujúcich podmienkam zadania.
Ak by sme ich chceli presne nakresliť, použijeme nasledujúcu úvahu na vypočítanie toho, kde sa pretínajú trojuholníkové stranu s obdĺžnikovými.
Ako zistíme obsah trojuholníka? Vieme, že ak je trojuholník pravouhlý so stranami x a y, tak z dvoch takýchto trojuholníkov sa dá poskladať obdĺžnik so stranami x a y, teda obsah jedného je polovica obdĺžnika.
Ak trojuholník nie je pravouhlý (ale je ostrouhlý), tak si ho môžeme rozdeliť na dva pravouhlé trojuholníky a dostaneme…že jeho obsah je polovicou obsahu obdĺžnika so stranami z a v, teda z.v/2. Čo je z a čo je v vidíme z obrázku.

Príklad M2: opravovala Veronika X-ka Zelmanová

Úlohou bolo zistiť koľko takýchto účtov mohol mať krčmár v zbierke.



Môžeme si toto násobenie rozpísať na dvakrát.
1. $P_1P_2N_1 \,.\, N_2$ = PNN
2. $P_1P_2N_1 \,.\, N_3$ = PNPN

(jednotlivé cifry sme si kvôli ľahšej orientácii označili P_1, P_2, N_1, …)

1. $P_1P_2N_1 \,.\, N_2$ = PNN

a) Ak by sa N_2 = 1, tak by sa muselo $P_1P_2N_1$ rovnať PNN a to sa zjavne nerovná.

Ak by sa N_2 = 5 a za $P_1P_2N_1$ by sme si dosadili najmenšie možné číslo 221, po vynásobení dostaneme 4-ciferné číslo. To isté platí aj pre N = 7 a N = 9. Musí teda platiť N_2 = 3.

b) $P_1P_2N_1$. 3 = PNN

ak za P_1 dosadíme 4 a viac, výsledok je väčší ako 1200, čiže nemá tri cifry. Preto P_1 = 2.

c) $2P_2N_1$ = PNN

N_1 môže byť 1,3,5,7 alebo 9. Lenže, keď P_2 . 3 = P my potrebujeme získať N a to pomocou cifry na mieste desiatok z násobenia N_1 . 3, ktoré musí byť nepárne.

1 . 3 =3
3 . 3 = 9

5 . 3 = 15
7 . 3 = 21
9 . 3 = 28
Vyhovuje nám iba 5. N_1 = 5

d) 2$P_2$5 . 3 = PN5

Pre P_2 musí platiť, že keď ho vynásobíme 3 (= N_2) a pripočítame 1 (cifra na mieste desiatok z 3 . 5 = 15) vo výsledku dostaneme buď žiadnu, alebo párnu cifru na mieste desiatok. 2 . 3 +1 = 7, 4 . 3 + 1 = 13, 6 . 3 + 1 = 19, 8 . 3 + 1 = 25, a to platí iba pre P_2 = 2 alebo 8.

2. 2$P_2$5 . N_3 = PNPN

N_3 = 9, pretože potrebujeme 4 ciferné číslo väčšie ako 2101 (najmenší možný výsledok) a keď najväčšie možné 2$P_2$5, čiže 285, vynásobíme 7 dostaneme 1995 a to nevyhovuje. Teraz už vieme že druhý činiteľ je 39. Prvý môže byť 225 alebo 285. Vyskúšame ich vynásobiť: 225 . 39 = 8775 a 285 . 39 = 11115. Správny výsledok je však 5 ciferný a preto je správny účet iba jeden.

```
  285
  . 39
 2565
 855
11115
```

Bodovanie:

- 2 b - nepochopené zadanie, ale inak všetko dobre
- 3 b - výsledok + zopár dobrých myšlienok
- 4,5 b - zopár chýb, ale inak všetko dobre
- 5 b - všetko dobre

Príklad M3: opravoval Michal Emsy Adamec

Tento príklad (ako napísala väčšina z vás) sa nedá riešiť inak ako skúšaním. Ale toto skúšanie si môžeme skrátiť.
Číslo prvého domu si označme ako x, druhého y a tretieho z.
Podľa zadania platí: 3 . x = z , z - x = y Potom 3 . x - x = y čiže y = 2 . x
Keďže z má byť trojciferné a platí z = 3 . x, tak x môže byť najviac 333 (keby bolo 334 tak z je už štvorciferné), ale to sa dá ešte znížiť na 329 (lebo v 333,332,331 a 330 sa opakujú cifry). x môže byť najmenej 100 (aby bolo trojciferné), ale to zvýšime ešte na 123 (100-110,120 je tam nula a tá tam nemôže byť, 111, … , 119, 121, 122 opakujú sa tam cifry a to sa tiež nemôže.) To je 207 možností (ráta sa aj 123 aj 329 :)). ALE keď je na konci čísla x päťka, tak v tom treťom čísle (na konci) sa bude päťka vyskytovať tiež, takže odstránime aj tieto možnosti a zostáva nám ich už len 186. Teraz zaškrtáme aj tie čísla, kde sa číslice opakujú alebo sa vyskytuje nula, a tých je 81 ale musíme odpočítať ešte dve (155,255) lebo tie sme už vyškrtali. A týchto 107 možností už bez problémov vieme vyskúšať na kalkulačke. No netreba zabudnúť na to, že keď nájdeme jedno riešenie, musíme hľadať ďalšie a nezastaviť sa. Čo, ste spokojní len s jedným riešením? Vyjdú nám napokon trojice čísel:
192, 384, 576
219, 438, 657
273, 546, 819
327, 654, 981 takže takéto čísla môžu byť na domoch...

Bodovanie:
1 bod za každé správne riešenie
1 bod za postup.

Príklad M4: opravoval Maťo MH Hriňák

Riešením úlohy je napríklad 0=V, 1=T, 2=E, 3=J, 4=R, 5=A, 6=N, 7=P, 8=O, 9=K. To, že vyhovuje, overíme dosadením.

Komentár a bodovanie:
Vzhľadom na to, že jedinou možnosťou bolo rozoberanie možností a my sme chceli len jedno riešenie, stačilo toto jedno riešenie nájsť ľubovoľným spôsobom a potom len ukázať, že vyhovuje zadaniu.
Vo vzorovom riešení nehľadáme všetky, lebo ich je veľmi veľa (rádovo tisíce). Ak je v zadaní napísané, že rovnaké písmenká musia byť zamenené za rovnaké číslice, neznamená to, že rôzne písmená musia mať rôzne číslice!
5 bodov za nájdené riešenie.

Príklad M5: opravovala Kami Vyslocká

Pre zjednodušenie si jednotlivé pravidlá očíslujme po poradí od 1 do 4. O pole sa stará spolu päť ľudí. Vyberieme si Letíciu a rozoberieme, čo robí. Ak pracuje Letícia, tak pracuje aj Julián aj Augustín (podľa 4). Potom podľa 1 pracuje aj Severína a September podľa 2 nepracuje. Ak však Letícia nepracuje, tak musí podľa 3 pracovať Julián. A čo ostatní traja? Ak pracuje aj Augustín, tak s ním podľa 1 pracuje aj Severína a podľa 2 September nepracuje. Ak Augustín nepracuje, môže s Juliánom pracovať ešte Severína a September nepracuje, alebo pracuje September a Severína nepracuje. Riešeniami teda sú tieto štyri kombinácie pracujúcich:
Letícia a Julián a Augustín a Severína.
Julián a September.
Julián a Severína.
Julián a Augustín a Severína.

Bodovanie: za každé zo štyroch riešení po 1 bode, z toho 0,5 za samotné riešenie a 0,5 za vysvetlenie, za postup a hľadanie ďalších riešení ďalší bod.

Príklad M6: opravoval Palo Minárik

Zo zadania bolo treba vytiahnuť dve podmienky. Keďže Jano zvolený nebol, hlasovalo za neho menej ako 2/3 rady. To znamená, že 5 ľudí (traja, ktorí sa zdržali, a dvaja, ktorí hlasovali proti) je viac ako 1/3 rady. $1/3\ r < 5$, teda $r < 15$. Ďalej vieme, že počet členov rady musí byť taký, že ak by hlasoval len jeden člen rady proti (a traja by sa zdržali), Jano by bol zvolený. $1/3\ r \leq 4$, teda $r \leq 12$. Z týchto dvoch podmienok dostaneme, že $12 \leq r < 15$. Správne sú teda tri možnosti 12, 13 a 14. (Skúška: 2/3 z 12 je 8, 12-3-2 je 7, Jano zvolený nie je; 2/3 z 13 je 8 2/3, 13-3-2 je 8, Jano zvolený nie je; 2/3 z 14 je 9 1/9, 14-3-2 je 9, Jano zvolený nie je)
Poznámka: Mnohí ste predpokladali, že počet členov rady musí byť deliteľný 3, čo nie je pravda. Napríklad ak je členov rady 13, teda 2/3 rady je 8 2/3, aby Jano zvolený nebol, musí za neho hlasovať 8 a menej členov rady, a aby zvolený bol 9 a viac!

Bodovanie: postup - 2body, výsledok - 1bod za každú správnu možnosť.