PIKOMAT
Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 5-6

Príklad M1 opravovala Alenka Kovárová

Ak má studňa rozmery 90 m×90 m, tak jej plocha je 8100 m^2. Keďže každá z troch častí má mať rovnaký obsah, tak musia mať tretinu z celkového obsahu, teda 8100 m^2:3 = 2700 m^2. Teraz si všimneme, že dve z častí sú trojuholníky. My poznáme vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka $S = z.v{:}2$, kde z je základňa (ľubovoľná strana trojuholníka) a v je výška na túto základňu (úsečka kolmá na základňu vychádzajúca z protiľahlého vrcholu). My poznáme obsah (2700 m^2) a základňu (90 m) týchto trojuholníkov, takže ľahko vypočítame ich výšku: $v = S.2{:}z$ = 2700 m^2 . 2 : 90 m = 60 m. Načo som počítala ich výšky? Nuž preto, lebo ich výška je vlastne vzdialenosť studne od ich strán (hornej a ľavej strany záhrady). Ešte nám chýba, ako je studňa vzdialená od dolnej a pravej strany záhrady. To je jednoduché. Vieme, že od hora až dolu naprieč záhradou je 90 m, tak ak od hora po studňu je 60 m, tak od studne dole bude 90 m - 60 m = 30 m (to je vzdialenosť medzi dolnou stranou záhrady a studňou). Rovnakou úvahou prídeme na to, že aj od pravej strany záhradu je studňa vzdialená 30 m.

Príklad M2: opravovala Irinka Malkin

Ak by klamal Bežec, na poslednom mieste by boli dvaja - Bežec a Staviteľ. Takže Bežec klamať nemohol. Ak by klamal Staviteľ, na poslednom mieste by sa neumiestnil nikto. Ak by klamal Nevedko, bol by buď prvý alebo posledný. Lenže na prvom mieste má byť Umazanček a na psolednom Staviteľ. Jeden z nich by tiež musel klamať, ale klamať má len jeden. Teda Nevedko neklamal. Čo ak by klamal Umazanček? Nebol by prvý. Keďže Staviteľ bol posledný, Umazanček musí byť druhý alebo tretí (nie je ani prvý ani posledný). Teda Bežec je prvý (nie posledný) a 2. a 3. miesto obsadili Nevedko a Umazanček. Sedí!

Bodovanie: za dôkaz, že Umazanček klame 3b; za dôkaz, že iná možnosť nie je 2b; za logickú chybu v úvahe -1b

Príklad M3: opravovala Kami Vyslocká

Zo zadania vieme, že všetkých kratuľkov bolo spolu 20. Najprv zistíme, s koľkými fafrnmi tancovali fafrnky. Prvá (Kamilka) tancovala so 7 fafrnmi, druhá (Vločka) s 8, tretia (Modroočka) s 9, podľa ... postupujeme ďalej: štvrtá by tancovala s 10, piata s 11, šiesta s 12, siedma so 14, ôsma s 15 atď.

Keďže Gombička tancoval so všetkými fafrnmi, stačí zistiť, ktorá je v poradí. Ak by bola Gombička štvrtá, bolo by kratuľkov (4 fafrnky + 10 fafrnov) 14. To nevyhovuje. Ak by bola Gombička piata, bolo by to (5 + 11) 16 kratuľkov. Ak by bola šiesta, (6 + 12) 18 kratuľkov, a ak by bola Siedma, bolo by na večierku spolu (7 fafrniek + 13 fafrnov) 20 kratuľkov. To vyhovuje zadaniu úlohy, preto fafrnov bolo 13. (Ak by bolo viac než 7 fafrniek, mali by na výber z viac než 13 fafrnov a bolo by ich na večierku viac než 20, čo nevyhovuje.)

Bodovanie: za zistenie počtu tanečníkov jednotlivých fafrniek 2b; za zdôvodnenie svojich myšlienok 2b; ak ste myšlienkami dospeli k riešeniu 1b; za nedôkladné až nejasné vysvetlenie sa strhávalo 0,5 až 1b

Príklad M4: opravoval Peter Miťko

Riešme úlohu najprv tak, aby všetky čísla v príklade boli prirodzené (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...). Má platiť: ...2 : ...3 = ...4 + ...5, kde ... sú nejaké číslice. Tie nás však nemusia zaujímať, lebo miesta "jednotiek" ovplyvňujú len "jednotky"(posledné číslice). Urobme si skúšku správnosti: ...4 . ...3 + ...5 = ...2 . Jednoduchým vynásobením a sčítaním sa dostaneme k záveru, že také čísla neexistujú. To bol prvý spôsob.

Druhý je veľmi podobný, ale ešte všeobecnejší: ...4 , ...2 sú párne čísla (P) a ...3 , ...5 sú nepárne (N). Teda musí platiť P : N = P + N. Avšak ľavá strana rovnice P : N = P a pravá strana rovnice P + N = N. Ľavá strana sa nerovná pravej, takže také čísla nevieme nájsť. Teda staviteľ mal pravdu.

Teraz zájdeme do množiny desatinných čísel: Zvyšok ...5 nemôže byť desatinné číslo, tak sa zvyšok nikdy neudáva. Ďalšia podmienka je, aby bol deliteľ väčší ako zvyšok. Príklad bude potom vyzerať takto: ...,2 : ...,3 = ...4 + ...5. Finta je v tom, že tým zvyškom, končiacim 5, sa zmení predposledná číslica a nie posledná. Napr.: 26,2 : 5, 3 = 4 + zv. 5. Teda pravdu mal Nevedko.

Bodovanie: správna úvaha (bral som do úvahy aj riešenia len v prirodzených číslach) 5b, menšia chyba 4 - 5b, dobrá myšlienka 3 - 4b,skúšanie možností 2 - 3b, nepochopenie zadania 0,2 - 2b

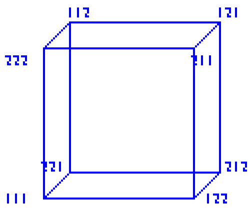
Príklad M5: opravovala Andyna Baranovičová

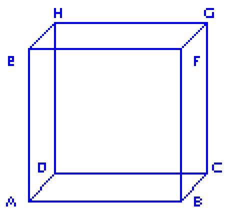
Začneme uvažovať od symbolu ⊝. ⊝bude párne číslo, pretože ak vynásobíme akékoľvek číslo párnym číslom, dostaneme párne číslo. Čiže ⊝ môže byť 0,2,4,6,8. Z radu desaťtisícov ale zistíme, že ⊝ musí byť väčšie ako 5, aby existovali ⇩ a ↗. Ostanú nám teda možnosti 6 a 8. Dosadíme do pohľadnice najskôr číslo 6. 6×6=36, ostane nám zvyšok 3. Teraz hľadáme číslo, pre ktoré platí: 5×⊝ + 3=_⊝. Dosadením jednotlivých číslic zistíme, že takéto číslo neexistuje. Overíme si teda možnosť ⊝=8. 6×8=48, ostane nám zvyšok 4. Hľadáme teraz číslo, ktoré dosadíme za ✤. Má platiť: 5×✤+4 = _✤. Ostali nám 4 a 9. Týmto istým spôsobom zistíme, že 9 nevyhovuje a dopočítame číslice pre zostávajúce znaky. (⊝=8, ✤=4, ●=6, ⚑=9, ⇩=0,1,2, ↗=1,2,3,).

Bodovanie:0,5b-postup, 0,5b-riešenie ⇩=0, ↗=1, 2b-riešenie ⇩=1, ↗=2, 2b-riešenie ⇩=2, ↗=3.

Príklad M6: opravovala Majka Hanulová

Čísel z 1 a 2 je osem: 111, 112, 121, 211, 221, 212, 122, 222. Môžeme ich rozdeliť na tri skupiny: jednotkové (112, 121, 211), dvojkové (221, 212, 122) a zvyšné (111, 222). Každé číslo má 4 možných susedov. Dostaneme ich tak, že vymeníme prvé, druhé a tretie dvojčíslie a všetky tri číslice (toto číslo budeme volať opačné). Dvojkové čísla majú dvoch dvojkových susedov, jedného jednotkového (opačný) a 111. Jednotkové to majú naopak. 111 má troch dvojkových susedov a 222, 222 naopak. Každé dve čísla majú dvoch spoločných susedov, okrem opačných čísel, ktoré nemajú spoločného suseda. Preto ich môžeme dať len vedľa seba alebo oproti (po kockovej uhlopriečke). Ukážeme to na číslach 111 a 222. Oproti nemôžu byť, lebo vtedy musí byť sused 111 dvojkový a musí mať okrem 111 dvoch spoločných susedov s 222, čo sa nedá (susedia 222 musia byť jednotkoví a takého má len jedného). Teda 111 a 222 musia byť vedľa seba, rovnako ako všetky opačné čísla. Dostali sme 4 susediace dvojice čísel, teda vlastne 4 hrany kocky. Jediný spôsob rozmiestnenia týchto dvojíc je na zvislé hrany, a tak, aby na hornom poschodí (EFGH) bolo len jednotkové čísla a 222 a pod nimi (ABCD) čísla k nim opačné Riešenie s iným obsadením poschodí, pokiaľ nie je otočením takéhoto, nie je - vyplýva to z postupu. Zistíme, koľko je riešení tohto typu. Necháme 111 a 222 na A a E a budeme hýbať ostatnými číslami. Môžeme ľubovoľne medzi sebou vymieňať čísla na jednom poschodí, čísla na druhom poschodí sa musia hýbať s nimi (aby nad sebou boli opačné čísla). Je šesť možností ako rozhádzať ostatné čísla.





Bodovanie: našli ste 6 možností 5b; tri možnosti 4b; 2 možnosti 3b; 1 možnosť 1b; ak ste nepochopili príklad alebo ste nenašli žiadne riešenie 0,5b; ak vám chýbal postup, strhla som 0,5b

.