PIKOMAT
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti kategórie 5-6

Príklad M1: opravovala Alenka Kovárová

Pretože z každého zo siedmich bodov majú vychádzať tri úsečky (resp. v nich končiť, to je to isté), tak to bude spolu 7×3 = 21 koncov úsečiek. Ale samozrejme, že každá normálna úsečka má dva konce a preto nech mám ľubovoľný počet úsečiek, tak máju párny počet koncov. No ale 21 nie je párne číslo a preto neexistuje žiadne také požadované spojenie siedmich bodov, lebo polovica úsečky ani úsečka s jedným koncom neexistuje.

Bodovanie: úplne správne = 5b; temer správne = 4b - 4,5b; bez zdôvodnenia = 2b - 3,5b; iba výsledok = 1,5b; zlé riešenie 0b - 1b.

Príklad M2: opravoval Ivo Masaryk

Máme 6 košíkov v ktorých je buď 5, 6, 12, 14, 23 a 29 banánov alebo ananásov. Teda máme 89 ks ovocia. Dan dostal 1 kôš ovocia a zvyšný počet ovocia sa musí dať vydeliť 3 (1 diel ananásy a dva diely banány). Keďže 89 = 3 . 29 + 2 stačí uvažovať také košíky, v ktorých je po delení 3 zvyšok tiež 2. Takto sme vylúčili košíky s 6 a 12 kusmi ovocia.

Vyskúšajme teraz ostané možnosti:

Košík s ... kusmi	5	14	23	29
Zvýšilo ... ovocia	84	75	66	60
Ananásov má byť	28	25	22	20

Vybraním niektorých zo zvyšných košov sa nedá dostať 28, 25 a 22 kusov ovocia (ananásov). Existuje teda jediné riešenie prvej úlohy, lebo 20 = 14 + 6 ananásy, zvyšok banány. Druhá úloha sa pri takomto prístupe riešiť nedá. Dan dostal kôš s 1 druhom ovocia. 29 ananásov alebo banánov.

Hľadajúc odpoveď na druhú otázku môžeme dospieť malým podvodom k inému riešeniu.

Skúšaním všetkých ostatných riešení sme prišli na to, že ak Dan zjedol 29 kusov ovocia a černoške ostalo v 1. košíku 5 ananásov a v ostatných košíkoch dva krát toľko banánov, teda 5 a 5, čo je vlastne 55(pardon, veľkým podvodom), tak sa v tomto prípade dá určiť druh ovocia. 60 = 5 + 55 (6+66 = 72,... nevyhovujú) Boli by to ananásy, pretože ak by dostal banány (1. košík ananásy ostatné banány),zadanie by vyzeralo inak: ...v niektorých košíkoch boli banány a v INOM ananásy. Odpoveď by však aj tak musela znieť tak, že nevieme určiť aký druh ovocia dostal, lebo sme našli dve riešenia a v prvom sa druh zistiť nedá. Vieme však, že Dan dostal...

Bodovanie: 2b - za správny výsledok 29 ks; 2b - konštatovanie, že sa nedá určiť druh; 1b - skúšanie ostatných možností; za opisovanie a tipy sa body patrične strhli.

Príklad M3: opravovala Monika Steinová

Označme si biele guličky - B a čierne guličky Č. Vieme, že farby guličiek v krabičkách nezodpovedajú farbám nakresleným na vrchnáčikoch krabičiek. Z toho vyplýva, že sú dve možnosti usporiadania guličiek v krabičkách:

krabičky	**BB**	**ČČ**	**BČ**
a)	ČČ	BČ	BB
b)	BČ	BB	ČČ

Zoberieme si krabičku, na ktorej vrchnáčiku je BČ. V tejto krabičke musia byť guličky rovnakej farby, teda BB alebo ČČ. Ak vyberieme:

- B z tejto krabičky, nachádzajú sa tu BB, potom v ČČ musia byť BČ a v BB bude ČČ. To je možnosť a) v tabuľke.
- Č z tejto krabičky, nachádzajú sa tu ČČ, potom v BB musia byť BČ a v ČČ bude BB. To je možnosť b) v tabuľke.

Ak vyberáme guľku z BB (z ČČ), môže byť:

1. B (Č), potom sú v krabičke BČ. V krabičke ČČ (v BB) musia byť potom BB (ČČ) a v krabičke BČ musia byť ČČ (BB).
2. Č (B), potom nevieme určiť aké sú v krabičkách guličky a potrebujeme ešte jeden výber.

Na najmenej JEDNO vytiahnutie môžeme zistiť, aké guličky sa v jednotlivých krabičkách nachádzajú.

Bodovanie: Správny výsledok 1 bod, logický postup 3,5 body, zistenie možného rozloženia guličiek a krabičkách a logické úvahy 0,5 bod.

Príklad M4: opravovala Miša Áčová

Tento príklad sa nedal riešiť kreslením, ako to skúšala väčšina z vás.

Riešenie tohto príkladu spočíva v použití kombinatoriky. V prvom kroku posypeme 3 malé štvorce jednou farbou (napríklad červenou). Koľko je takýchto možností? Pre prvý štvorec máme 9 voľných políčok, pre druhý o 1 menej, čiže 8 a pre ten tretí už len 7. Keďže tieto možnosti môžeme skombinovať "každý s každým", znamená to, že tieto čísla vynásobíme, čiže 9×8×7. Keďže ale máme všetky 3 políčka rovnakej farby, niektoré riešenia považujeme za rôzne, aj keď sú rovnaké. V tomto prípade je každé riešenie započítané 6-krát, pretože 3 rovnaké políčka môžeme rôzne očíslovať 6-timi spôsobmi a stále je to to isté riešenie. Takže máme (9×8×7):6=84 možností pre červenú farbu (toto číslo nazývame kombinácie 3 z 9). Pre čiernu farbu pokračujeme rovnako, ale máme už len 6 voľných políčok, takže spolu pre 3 čierne políčka to bude (6×5×4):6=20 možností (kombinácie 3 zo 6). Opäť môžeme čierne a červené políčka medzi sebou skombinovať, takže pre čiernu a červenú farbu bude spolu 84×20=1680 možností. A keďže nám zostali 3 neposypané políčka, je to presne toľko, koľko potrebujeme, takže ďalej sa už na výsledku nič nemení, lebo ich môžeme "neposypať" práve jedným spôsobom.

Bodovanie: Za riešenie kreslením ste mohli dostať približne 0,5b. Za správny výsledok ste dostali 2b, za postup 0b - 3b (podľa správnosti a slovného popisu), za chýbajúci slovný popis -2b.

Príklad M5: opravovala Kaťa Antoničová

Obdĺžnik 180×252 metrov máme rozdeliť na rovnako veľké a k tomu čo najväčšie štvorce. To znamená, že stačí nájsť najväčší spoločný deliteľ čísel 180 a 252, tak určíme stranu štvorca, zaručí nám to, že štvorce budú najväčšie možné a zároveň neostane odpad. Takže rozložíme obe čísla na súčin prvočísiel:
180 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5
252 = 2 . 2 . 3 . 3 . 7

Z toho vidíme, že najväčší spoločný deliteľ je číslo 2.2.3.3=36 (teda štvorce budú mať strany dlhé 36 metrov) a navyše, že štvorcov bude 5.7=35.

Pre piatakov, ktorí ešte nevedia, čo je to najväčší spoločný deliteľ, tu mám iné riešenie:

Aby štvorce boli čo najväčšie, musí ich byť čo najmenej. Preto skúšame deliť jedno z čísel (napríklad 180) číslami 1,2,3,..., a ak nám vyjde celé číslo, skúšame výsledkom deliť druhé číslo, teda 252.

180 : 1 = 180 (ak by sa dalo 252 deliť 180, štvorce by mali stranu dlhú 180 metrov)
252 : 180 = 1,4 Nevyšlo nám celé číslo, skúšame ďalej:
180 : 2 = 90
252 : 90 = 2,8 (nevyšlo)
180 : 3 = 60
252 : 60 = 4,2 (nevyšlo)
180 : 4 = 45
252 : 45 = 5,6 (nevyšlo)
180 : 5 = 36
252 : 36 = 7 Vyšlo!!!
Teda štvorce majú stranu dlhú 36 metrov a je ich 5 . 7 = 35.

Bodovanie: Za správny výsledok bez postupu som dávala 2 body. Ak niekto zabudol spočítať, koľko je štvorcov, strhávala som 0,5 b, ďalšie body som udeľovala individuálne podľa rozsahu postupu a správnosti riešenia.

Príklad M6: opravovala Dáša Horáková

Dalo sa postupovať rôzne. Niekto len skúšal a našiel, iní si pomohli trochou matematiky. Súčet všetkých čísel domina je 168 = 7.(0+1+2+3+4+5+6), my potrebujeme, aby na každej strane štvorca bol súčet práve 44 - to je spolu 176 = 4 . 44. Tento súčet je väčší ako 168, pretože tu sme dvakrát započítali rohové políčka. Teda z rozdielu týchto dvoch čísel dostaneme súčet rohových políčok: 176 - 168 = 8 Môže byť v nejakom rohu nepárne číslo, aby súčet strán bol 44? Nemôže, pretože na každej strane štvorca máme 7 celých domín a ešte polovicu.

Keď si uvedomíte, ako sa dominá k sebe prikladajú, bude vám jasné, že každé číslo sa opakuje dvakrát (vedľa seba stojace políčka dvoch susedných kociek), len jedno posledné na jednom rohu nám zostane samé - nemá na tej strane pár. Práve od tohto čísla záleží, či súčet čísel na tejto strane bude párny alebo nepárny. My potrebujeme všetky súčty párne, na rohoch teda musia byť párne čísla. Je len zopár možností pre rohové políčka: 6 2 0 0; 4 4 0 0; 4 2 2 0; možnosť 2 2 2 2 nevyhovuje, pretože máme len 7 domín s číslom 2. No a teraz treba už len skladať a počítať.

2	2	4	4	1	1	1	1	5	5	6	6	3	3	0
1														0
1														2
6														2
6														2
0														2
0														5
1														5
1														5
3														5
3														4
4														4
4														4
6														4
6	6	6	2	2	3	3	3	3	5	5	0	0	0	0

Bodovanie: za úplne správne poskladaný štvorec 5b, za nejaké drobné detaily vo vysvetlení alebo nákrese -0,5b, za poskladanie štvorca s podobnými, ale nie úplne presnými súčtami 1 - 1,5b; za štvorec s porušenými pravidlami (opakovanie domin. kociek) 0,5b; za zistenie, že súčet rohov je 8 a môžu to byť len párne čísla 1,5b, za nejaké ďalšie chybičky ešte o kúsok menej.