Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–6

Úloha M1: Legendárny strom. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

Na úvod jedno (možno nové) slovíčko: vlastnosť čísla, ktorá hovorí o tom, či je párne alebo nepárne, sa nazýva jeho *parita*.

Na strome máme 81 čísel od 10 po 90. Odvážlivec zakaždým dve čísla zmaže, ale zároveň pripíše ich súčet. Toto robí dovtedy, kým mu ostane iba jedno číslo. Bude párne alebo nepárne?

Kľúčom k tejto úlohe je uvedomiť si jednu vec: súčet VŠETKÝCH čísel na strome sa nemení! Prečo? Nuž lebo v každom kroku tento súčet najprv zmenšíme o niektoré dve čísla, vzápätí ich tam ale vrátime, pretože pripíšeme ich súčet. To znamená, že posledné číslo, ktoré ostane na strome, bude opäť len súčet všetkých pôvodných čísel.

Súčet čísel 10+11+12+...+89+90 môžeme buď pracne spočítať na kalkulačke, alebo si pomôžeme malou fintou. Všimnime si, že 10+90 = 100, 11+89 = 100, 12+88 = 100 atď. Takýchto dvojíc, ktorých súčet je rovný 100, je na strome presne 40 (pretože máme 81 čísel), no a v strede nám ešte ostala jedna 50-ka. Takže súčet všetkých týchto čísel vieme veľmi jednoducho spočítať ako 100·40 + 50 = **4050**. Vidíme, že **súčet je párny**.

My ale dokonca ani nemusíme tento súčet poznať, aby sme vedeli určiť jeho paritu. Sčitujeme totiž po sebe idúce čísla. No a po sebe idúce čísla sú vždy striedavo párne a nepárne. Takže je jasné, že z našich 81 čísel bude presne 41 párnych a 40 nepárnych (párnych je o 1 viac, pretože začíname aj končíme párnym číslom: 10 a 90). No a už nie je problém si doomyslieť, že sčítaním 40 nepárnych čísel dá dokopy párny súčet. Keď ešte pripočítame 41 párnych čísel, na parite sa nič nezmení, **výsledok bude určite párny**!

Bodovanie: správna odpoveď – 1b.; myšlienka, že posledné číslo je súčtom pôvodných čísel + vysvetlenie – 1b. + 1b.; určenie parity čísla na základe súčtu čísel (či už pomocou 4050 alebo pomocou úvahy o sčitovaní párnych a nepárnych čísel) – 2b.

Poznámka: nestačilo napísať, že hľadané číslo je súčtom pôvodných čísel, bolo treba aj ukázať prečo. Taktiež ak ste vyskúšali 2-3 konkrétne postupy škrtania čísel a vyjde vám rovnaké číslo, neznamená to, že toto číslo vám vyjde vždy.

Úloha M2: Sviťania. *Opravovala Simona „Simča" Galková.*

Najprv si povieme niečo k zadaniu, keďže sa vyskytli problémy s jeho pochopením. Mnohí ste uvažovali nad tým, čo sa stane s Igorovým kamarátom, keď Igor odíde. Ak si pozorne prečítate zadanie, zistíte, že o ktoréhokoľvek Igorovho kamaráta sa vôbec nemusíte báť. Zo zadania totiž vyplýva, že vždy tam má každý aspoň jedného kamaráta, teda aj keď tam Igor nebude, nič sa nestane, jeho kamarát tam určite bude mať nejakého iného kamaráta.

Podľa zadania ste mali Sviťanom poradiť, ako sa rozdeliť na dve skupiny tak, aby mal každý v tej druhej skupine aspoň jedného kamaráta. To znamená, že potrebujeme vymyslieť postup, ktorý funguje bez ohľadu na počet detí, bez ohľadu na to, kto má ako veľa kamarátov, či sa kamaráti každý s každým, alebo nie. Teda vašou úlohou bolo napísať všeobecný postup, ktorý funguje vždy. Ukázať postup len pre určité situácie, napríklad keď sú kamaráti iba po dvojiciach, alebo iba po trojiciach, alebo keď sa kamaráti každý s každým, nestačí. Tu si ukážeme dve najčastejšie správne riešenia príkladu.

Najprv vezmeme jedného náhodného Sviťana a dáme ho do prvej skupiny. Potom vyzveme všetkých jeho kamarátov, aby sa zaradili do druhej skupiny. Ostane nám nejaká skupinka ešte nezaradených Sviťanov, ktorí možno majú kamaráta v druhej skupine, ale určite nie v prvej, lebo v takom prípade to by sa už boli zaradili. Preto teraz vyzveme tých, ktorí majú kamaráta v druhej skupine, aby sa zaradili do prvej. Ostane nám ešte menšia skupinka nezadelených Sviťanov. Opäť vyzveme tých, ktorých priatelia sa práve zaradili do prvej skupiny, aby sa zaradili do skupiny druhej. Takto budeme pokračovať, až dokiaľ sa nezaradia všetci. Môže sa však stať, že nám ostane nezaradená skupinka Sviťanov, lebo ešte nemajú žiadneho zaradeného kamaráta. Stane sa tak vtedy, ak je to skupinka, ktorá sa kamaráti iba medzi sebou a snikým iným. V takom prípade z nich opäť vyberieme jedného náhodného Sviťana a celý postup opakujeme, až kým nebudú zadelení úplne všetci.

Druhý postup je podobný, avšak nebudeme zaraďovať celé skupiny Sviťanov, ale podelíme ich po jednom. Začneme tým, že si vyvoláme ktorúkoľvek kamarátsku dvojicu (ak majú aj ďalších kamarátov, to teraz nevadí, vezmeme len dvoch) a zaradíme ich do opačných skupín. Ďalej budeme postupne brať ďalšieho a ďalšieho Sviťana a akaždým ho zaradíme takýmto spôsobom:

- ak má kamaráta len v jednej skupine, dáme ho do opačnej
- ak má kamaráta v oboch skupinách, dáme ho do ktorejkoľvek skupiny
- ak nemá kamaráta ani v jednej skupine, zavolá si jedného spomedzi nezaradených Sviťanov a zaradia sa do opačných skupín.

Pozor, v poslednom prípade je veľmi dôležité, aby si zavolal toho kamaráta! Mnohí ste robili chybu, že v prípade, keď nemá kamaráta ani v jednej skupine, zaradili ste ho do hociktorej a to je všetko. To však nefunguje! Uvedieme si jeden jednoduchý príklad. Predstavte si, že Andrej sa kamaráti iba s Brunom, ale že Bruno má okrem Andreja ešte veľmi veľa iných kamarátov. Keď najprv zaraďujeme Andreja, nemá ešte kamaráta v žiadnej skupine (pretože jeho jediný kamarát Bruno je ešte nezaradený), a preto ho môžeme dať kamkoľvek. Ak si teraz Andrej nezavolá svojho jediného kamaráta Bruna a nedá ho hneď do opačnej skupiny, môže sa stať toto: keď budeme neskôr zaraďovať Bruna (ktorý má veľa kamarátov), môže už mať nejakého kamaráta v oboch skupinách. Povieme si preto, že Bruna predsa môžeme zaradiť kamkoľvek a môže sa stať, že ho zaradíme k Andrejovi. To je však pre Andreja problém, pretože teraz je jeho jediný kamarát s ním v skupine, a teda už nemôžeme splniť podmienku zo zadania.

Bodovanie:

akýkoľvek správny postup – 5b.; za menšie nezrovnalosti som strhávala max 1b.; nedokončený postup – 2,5b.; uvedených niekoľko prípadov bez všeobecného postupu – do 2,5b.

Tabuľka k vzorovému riešeniu Úlohy M3: Dan.

	ROZMEDZIE	KONČÍ	DÁTUMY			KOĽKATÝ DEŇ		
Január	1-31	1	1.1.	2.1.	3.1.	1	2	3
Február	32-59	2	3.2.	4.2.	5.2.	34	35	36
Marec	60-90	3	6.3.	7.3.	8.3.	65	66	67
Apríl	91-120	4	9.4.	10.4.	11.4.	99	100	101
Máj	121-151	5	12.5.	13.5.	14.5.	132	133	134
Jún	152-181	6	15.6.	16.6.	17.6.	166	167	168
Júl	182-212	7	18.7.	19.7.	20.7.	199	200	201
August	213-243	8	21.8.	22.8.	23.8.	233	234	235
September	244-273	9	24.9.	25.9.	26.9.	267	268	269
Október	274-304	10	-----------			-----------		
November	305-334	11	3.11.			307		
December	335-365	12	-----------			-----------		

Úloha M3: Dan. *Opravoval Martin Krištien.*

Hľadáme taký dátum, ktorý zapísaný bez bodky dáva poradové číslo daného dňa v roku. Dalo by sa postupne overiť každý jeden dátum, avšak v roku existuje 365 rôznych dátumov, takže to by trvalo hrozne dlho. Skúsme preto najprv tento veľký počet možností nejako obmedziť.

Pre začiatok by sme si ku každému mesiacu mohli napísať, ktoré poradové čísla dní v roku obsahuje: napríklad január obsahuje 1. až 31. deň v roku, február obsahuje 32. až 59. deň v roku, atď. až december obsahuje 335. až 365. deň v roku. Toto vidno v prvom stĺpci tabuľky.

Ďalej v rámci jedného mesiaca sa samozrejme druhá časť dátumu (vyjadrujúca mesiac) nemení. Takže o každom mesiaci vieme povedať, akým číslom bude končiť každý jeho dátum. To vidno v druhom stĺpci tabuľky.

Pomocou týchto dvoch vecí vieme z každého mesiaca vybrať iba tých zopár dátumov, ktoré zapísané bez bodky naozaj udávajú také poradové číslo, ktoré by sa v danom mesiaci mohlo nachádzať. To znelo trochu komplikovane, no ukážeme si to na jednoduchom príklade. Zoberme si napríklad apríl: obsahuje 91. až 120. deň v roku a všetky jeho dátumy (samozrejme) končia štvorkou. Preto nám teraz stačí vybrať také čísla z rozmedzia 91-120, ktoré končia štvorkou: to sú 94, 104 a 114. K týmto číslam teda patria dátumy 9.4., 10.4. a 11.4.

Takýmto spôsobom z každého mesiaca vyberieme iba tie dátumy, ktorých zápis bez bodky patrí do rozmedzia daného mesiaca. To vidíme v ďalšom stĺpci tabuľky. Od januára až po september to boli vždy 3 dni v mesiaci, a potom už iba jeden dátum v novembri (dátumy v októbri musia končiť _10, ale také číslo v rozmedzí 274-304 nie je; dátumy v decembri musia končiť _12, ale také číslo v rozmedzí 335-365 nie je).

Teraz neostáva iné, ako pre tieto dátumy skutočne presne zistiť, koľkatý deň v roku označujú. Aj tu si môžeme trochu pomôcť prvým stĺpcom tabuľky: napríklad ak marec začína 60. dňom v roku, tak potom 6. marec bude 65. dňom v roku, čiže 60+6–1 (nezabudnúť na to „mínus 1"!). Skutočné poradové čísla vybraných dátumov vidíme v poslednom stĺpci tabuľky.Jediný prípad, kedy sa skutočné poradové číslo zhoduje so zápisom toho dátumu bez bodky, je **26.9. Hurá, našli sme jediný vyhovujúci dátum!**

Zvyšok úlohy už je malina: spočítame súčin 26·9 = 234, takže zistíme, že v roku 2201 bude mať Dan 234 rokov. To znamená, že sa narodil v roku 2201 – 234 = **1967**. Hotovo! **Dan sa narodil 26. 9. 1967**.

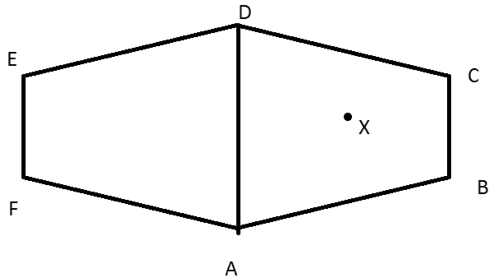
Bodovanie:

výsledok – 2,5b.; výsledok bez roku – 2b.; postup – 2,5b.;

Úloha M4: Strážnici. *Opravoval Pavol „Lietadlo" Koprda.*

Potrebujeme ukázať, že nejaká strana ostane nezasiahnutá. Najprv si samozrejme nakreslíme 6-uholník, ktorého uhly sú menšie ako 180°, a niekam dnu nakreslíme bod X – triafanú osobu. Ďalej si pomôžeme tým, že dokreslíme jednu uhlopriečku, ktorá nám 6-uholník rozdelí na dva štvoruholníky. Zo zadania vieme, že osoba vnútri 6-uholníka nestojí na uhlopriečke, takže je jasné, že musí stáť vnútri niektorého štvoruholníka.

Štvoruholník, v ktorom je osoba, si označíme ABCD, zvyšné dva vrcholy označíme E a F (tak, ako na obrázku).



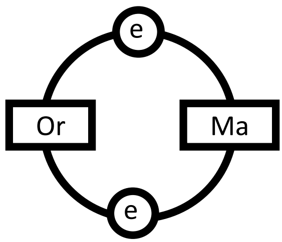
Teraz sa pozrime na strany DE, EF a FA. Ktoré výstrely by ich mohli zasiahnuť? Výstrely z vrcholov A a D musia smerovať do 4-uholníka ABCD, takže tie idú úplne zlým smerom. Výstrely z vrcholov E a F tiež nevyhovujú, pretože na to, aby trafili osobu X, musia tieto výstrely prejsť zo štvoruholníka DEFA do štvoruholníka ABCD. Takže musia prejsť cez uhlopriečku AD, a preto tiež nemôžu zasiahnuť strany DE, EF ani FA. Ostali nám teda iba dva výstrely – z vrcholov B a C – ktoré by mohli zasiahnuť strany DE, EF a FA. Keďže ale tieto výstrely sú iba dva a strany sú tri, je jasné, že aspoň jedna strana určite ostane nezasiahnutá.

Bodovanie:

nakreslený jeden konkrétny obrázok a tvrdenie, že to platí – max 2b.;
za vynechané alebo nedostatočne vysvetlené kroky v postupe som strhával 1 až 2b.

Úloha M5: Vnúčence. *Opravoval Martin „Nick“ Smolík.*

Je jasné, že keď medzi hráčmi (Oresom a Manom) nie je žiadne elfíča, tak vyhrá ten, kto je práve na ťahu. Z toho tiež vyplýva, že žiaden hráč nechce vyradiť posledné elfíča medzi sebou a súperom. K takémuto ťahu preto dôjde až na konci, keď už sú v hre len 2 elfíčatá – z každej strany jedno (ako na obrázku). Vtedy už hráč, ktorý je na ťahu, nemá na výber: musí vyradiť niektoré z elfíča, a tak v ďalšom ťahu prehrá.



Ukázali sme teda, že kto vyradí predposledné elfíča, prehrá. Keďže elfíčat bolo na začiatku 11, „predposledné elfíča“ znamená DESIATE elfíča. Ľahko si už spočítame, že desiaty ťah pripadne na toho, kto nezačínal. Preto **vyhrá vždy ten, čo začne**.

Bodovanie:

správna odpoveď – 1b.; určenie prehrávajúceho momentu (obrázok) – 1,5b.; zistenie, že existuje viacej možných počiatočných rozostavení –1b.; popis postupu – 1,5b.

p-mat

APVV

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09