Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–6

Úloha M1: Turnaj. *Opravoval Matúš Kopf.*

Vieme, že turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov, pričom každý s každým odohral presne jeden zápas. Môžeme si vypísať všetky dvojice, alebo spraviť tabuľku a zrátať políčka a zistíme, že dvojíc, a teda aj zápasov je 10. Celkový súčet bodov všetkých hráčov musel byť 10.

Pozrime sa ďalej na to, čo nám zadanie hovorí o výsledkoch jednotlivých zápasov. Vieme, že hráč, ktorý skončil ako druhý, ani raz neprehral. To znamená, že v zápase s víťazom turnaja musel buď vyhrať alebo remizovať. Keďže vieme, že víťaz turnaja neremizoval ani raz, druhý hráč musel víťaza poraziť.

Keďže každý súťažil s každým so zvyšných 4 hráčov, každý odohral 4 zápasy. To znamená, že každý hráč mohol získať v turnaji najviac 4 body. No my sme už zistili, že víťaz turnaja prehral aspoň jeden zápas, takže mohol získať najviac 4 - 1 = 3 body. Druhý hráč zase získal minimálne 2,5 bodu. Vieme totiž, že vyhral nad prvým a ani jeden zápas neprehral, teda v najhoršom prípade všetky ostatné zápasy remizoval, teda získal aspoň 1+0,5+0,5+0,5 = 2,5 bodu. Keďže druhý mal aspoň 2,5b a prvý najviac 3b, je jasné, že museli mať presne 2,5 a 3, inak by prvý nemal viac bodov ako druhý a nebol by prvý.

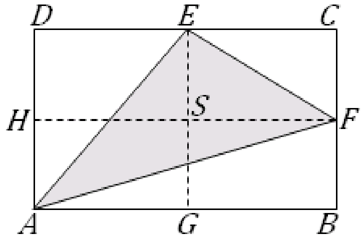
5,5 bodu sme už rozdelili, zvyšní traja hráči teda získali dokopy 4,5b. Tretí hráč mohol získať maximálne 2 body, keďže musí mať menej bodov ako druhý. Keby mal 1,5 bodu alebo menej, tak štvrtý a piaty hráč by mali dokopy 3 body, teda aspoň jeden z nich by musel mať 1,5 bodu alebo viac, čo nastať nemôže. Teda tretí hráč mal 2 body. Podobnou úvahou zistíme, že štvrtý hráč musel získať 1,5bodu a piaty tým pádom 1 bod. Vychádza nám teda, že jednotliví **hráči v turnaji získali 3; 2,5; 2; 1,5 a 1 bod**. Ešte by sme si mali overiť či taká situácia mohla nastať. Tretí musí mať z posledných dvoch zápasov ešte 1,5boda (pol boda už má za remízu s druhým), takže to je jedna výhra a jedna remíza, zistíme, že oba možnosti, či vyhral nad štvrtým alebo nad piatym, vedú k dobrej tabuľke, takže riešenie, že **hráči získali 3; 2,5; 2; 1,5 a 1 bod** je správne**.**

	1	2	3	4	5	b
1	x	0	1	1	1	3
2	1	x	0,5	0,5	0,5	2,5
3	0	0,5	x	0,5	1	2
4	0	0,5	0,5	x	0,5	1,5
5	0	0,5	0	0,5	x	1

	1	2	3	4	5	b
1	x	0	1	1	1	3
2	1	x	0,5	0,5	0,5	2,5
3	0	0,5	x	1	0,5	2
4	0	0,5	0	x	1	1,5
5	0	0,5	0,5	0	x	1

Bodovanie:
správne riešenie – 3b.;
postup – 2b.

Úloha M2: Hľadanie. *Opravovala Zuzana „Bum“ Bogárová.*



Začneme tým, že si podľa zadania zostrojíme náčrt: obdĺžnik ABCD znázorňujúci pôdorys hradu so stredmi strán E, F, G, H. Na obrázku si môžeme všimnúť, že priestor, kde je Zanisina komnata, nám rozdelí zvyšok obdĺžnika ABCD na tri trojuholníky. Keďže zistiť obsah trojuholníka AFE priamo nie je jednoduché, môžeme namiesto neho vypočítať obsah zvyšných troch trojuholníkov – ABF, CEF a AED – a ich súčet odpočítať od obsahu obdĺžnika ABCD. Z obrázku si ďalej môžeme všimnúť, že trojuholníky ABF, CEF aj AED sú pravouhlé. Pozrime sa teraz na ne po jednom.

Keď spojím body F a H, rozdelím obdĺžnik na polovice. Týmto vznikne obdĺžnik ABFH. Keďže úsečka AF tvorí uhlopriečku obdĺžnika ABFH, rozdeľuje ho na dve rovnaké polovice. Preto trojuholník ABF zaberá presne polovicu obdĺžnika ABFH, čo je jedna štvrtina celkového obsahu obdĺžnika ABCD. Takisto môžeme obdĺžnik ABCD rozdeliť spojením bodov E a G. Znova vznikne obdĺžnik s polovičným obsahom ABCD, tentokrát obdĺžnik AGED. Trojuholník AED tvorí polovicu obdĺžnika ADEG, čo je znova štvrtina celkového obsahu obdĺžnika ABCD. Na záver nám zostáva zistiť obsah trojuholníka EFC. Vidíme, že obdĺžnik SFCE tvorí štvrtinu obdĺžnika ABCD a že trojuholník EFC je polovica obsahu obdĺžnika SFCE. Keďže SFCE tvorí jednu štvrtinu obsahu obdĺžnika ABCD, obsah trojuholníka EFC je jednou osminou celkového obsahu obdĺžnika ABCD.

Teraz mi stačí tieto obsahy už len sčítať. Spolu tvoria $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ celkového obsahu obdĺžnika ABCD. Trojuholník AEF v ktorom je Zanisina komnata tvorí zvyšok celkového obsahu, teda $1-\frac{5}{8}=\mathbf{\frac{3}{8}}$ **celého obdĺžnikového pôdorysu.**

Bodovanie:

správny výsledok – 2b.; vysvetlenie postupu – 3b.; ak ste si určili dĺžky strán obdĺžnika a počítali ste s nimi, strhávala som 1b.

Úloha M3: Slová. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Igor vie, že musí použiť pre každé písmeno inú cifru, no pre rovnaké písmená rovnaké cifry. Dokopy je rôznych cifier osem (Ť, A, H, V, O, J, D, I).

Začnime teda najľahšie ako sa dá: s písmenkom Ť. Vieme, že 6-krát číslo, ktoré sa skrýva pod slovom ŤAHAŤ, nám dáva na konci 5-ciferné číslo zašifrované slovo VOJDI. Žiadna iná cifra ako 0 alebo 1 nemôže byť na mieste Ť, pretože by výsledné číslo nebolo 5-ciferné ale 6-ciferné. (2×6 = 12, 3×6 = 18, atď.) 0 na mieste Ť ale tiež byť nemôže, pretože 0x6 je stále 0 a teda na mieste písmenka I vo výslednom čísle by bola tiež 0. To by znamenalo, že Ť a I majú rovnaké cifry, no podľa zadania to tak byť nesmie. Preto vieme, že za Ť môže Igor dosadiť jedine cifru 1.

Ťažšie to už je s Ačkom. Tu môžeme na začiatok povedať s určitosťou, že nemôžeme dosadiť cifru väčšiu ako 5, pretože inak by bolo číslo ukryté pod slovom ŤAHAŤ 6-ciferné (7×6 = 42; 8×6 = 48; 9×6 = 54; a keby sme pripočítali 4 alebo 5 k číslu na prvom mieste, čo je 1x6 = 6, dostali by sme na mieste V číslo 10 alebo 11).

Taktiež nemôžeme za A dosadiť 0, pretože by vyšla 0 aj na mieste desiatok vo výsledku. To isté platí aj pre cifry 2, 4 a 6 (**2**×6 = 1**2**, **4**×6 = 2**4** a **6**×6 = 3**6**). Zostávajú nám cifry 3 a 5.

Zatiaľ teda s istotou vieme len to, že za písmeno Ť dosadíme cifru 1 a za písmeno I cifru 6. Spravme si teda tabuľku, kde uvidíme všetky možnosti čísla ŤAHAŤ, ktoré nám zostávajú:

ŤAHAŤ	VOJDI	ŤAHAŤ	VOJDI
13031	78186	15051	90306
13231	79386	15251	91506
13431	80586	15351	92106
13531	81186	15451	92706
13731	82386	15751	94506
13831	82986	15851	95106
13931	83586	15951	95706

Vyfarbený riadok je jediný, keď sú rôzne tie cifry, ktoré majú byť rôzne. Igor teda musí priradiť k písmenkám cifry takto: **Ť = 1, A = 5, H = 4, V = 9, O = 2, J = 7, D = 0, I = 6.**

Bodovanie:

správne dosadené cifry – 2b.; vysvetlenie postupu – 3b. Ak som niekomu za niečo strhla body, vysvetlenie nájde vo svojom riešení.

Poznámka:

S potešením musím konštatovať, že skoro všetci ste túto úlohu zvládli vypočítať. Niektorí z vás, bohužiaľ, zabudli na podmienku zo zadania, že za rôzne písmenká nemôžu byť dosadené rovnaké cifry. Tí mohli získať maximálne 0,5 boda.

Úloha M4: Jediná vec. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Táto úloha dopadla lepšie ako sme čakali, zvládli ste ju celkom dobre.

Zanisa má nejako rozmiestnené nálepky na Rubikovej kocke, a chce ich prelepiť čo najmenej tak, aby mala jednu stenu jednofarebnú. Ak by mala na niektorej stene veľa nálepiek rovnakej farby (napríklad päť zelených), tak by si vybrala túto stenu a dolepila by tam zvyšné štyri zelené nálepky z iných stien.

Lenže my sa pýtame na najhorší možný prípad. To je ten, keď nie je na žiadnej stene veľa nálepiek rovnakej farby. Keďže máme len šesť farieb a políčok na každej stene je deväť, tak aspoň dve políčka na stene budú rovnakej farby.

Najhoršia stena je teda taká, kde sú len najviac dve políčka rovnakej farby. Môže existovať kocka, ktorá má len takéto najhoršie steny? Áno môže, napríklad ak má tri steny takéto a tri takéto (viď obrázok). Ľahko si zrátame, že na takejto kocke je naozaj každej farby 9 políčok.

1	2	3
1	2	3
4	5	6

1	2	3
4	5	6
4	5	6

No a koľko nálepiek musí Zanisa prelepiť pri takejto najhoršej kocke? Keďže na každej stene sú max. dvojice rovnakej farby, musí k nim pridať ešte 7 nálepiek danej farby, aby mala celú stenu jednofarebnú.

Bodovanie:

Správna odpoveď – 2b., uznával som odpoveď 7, aj 14, keďže tých 7 políčok na jednej stene prelepí za 7 políčok na iných stenách; vysvetlenie – 3b. Pol boda ste mohli stratiť, ake ste neukázali, že naozaj existuje kocka, ktorá má všetky steny najhoršieho typu.

Úloha M5: Posledná úloha. *Opravovala Dominika Iždinská.*

Najmenší možný štvorec je štvorec rozmerov 1×1, v ktorom je vpísané číslo jeden. Tento štvorec má vo všetkých smeroch rovnaký súčet (1) a preto nevyhovuje zadaniu.

Druhý najmenší štvorec je štvorec veľkosti 2×2, do ktorého máme vpísať čísla 1, 2, 3 a 4. Vnútri štvorca by sme mali dosiahnuť šesť rôznych súčtov: dva v riadkoch, dva v stĺpcoch a dva v uhlopriečkach. Lenže v takomto štvorci je v súčte každé s každým (s jedným v riadku, s druhým v stĺpci a tretím na uhlopriečke). Takže pri akomkoľvek rozmiestnení tu určite nájdeme aj súčty 1+4=5 a 2+3=5. Štvorec 2×2 preto nikdy nebude antimagický.

Ďalší možný štvorec má veľkosť 3×3. Pri číslach od 1 do 9 môžeme dosiahnuť najmenší súčet 1+2+3=6, najväčší 7+8+9=24. Vieme dosiahnuť i každý súčet medzi tým. To je spolu 19 súčtov. V štvorci veľkosti 3×3 máme 8 súčtov, v troch riadkoch, troch stĺpcoch a dvoch uhlopriečkach. Takýto štvorec by sme teoreticky mohli vedieť zostrojiť, no na to, aby sme ukázali, že to naozaj ide, musíme nájsť nejaký konkrétny príklad. Tých ste našli naozaj dosť, napríklad ten na obrázku.

1	2	3
4	6	8
5	7	9

V štvorci na obrázku sú súčty v riadkoch postupne 6, 18 a 21, v stĺpcoch 10, 15, 20 a v uhlopriečkach 14 a 16. Keďže sú všetky rozdielne a použili sme všetky čísla od 1 po 9, môžeme sa tešiť – našli sme štvorec spĺňajúci podmienky zadania, a ukázali sme si, že žiadny menší nemôže existovať N**ajmenší možný antimagický štvorec má veľkosť 3×3**.

Bodovanie:
správna odpoveď (najmenší štvorec má rozmery 3×3 + uvedenie príkladu takéhoto štvorca) – 2,5 b.; odôvodnenie, prečo menší štvorec nefunguje – 2,5 b. Tu som strhávala body za neúplne alebo nesprávne vysvetlenie.

Poznámka:
Väčšina z vás vôbec nespomenula štvorec 1×1. Nestrháva som za to body, keďže rozumiem, že ste brali ako samozrejmosť, že takýto štvorec nefunguje. Pre úplnosť dôkazu je ale dobré spomenúť, prečo takýto štvorec nemôže byť antimagický, keďže aj to je štvorec s rozmermi n×n menší než 3×3.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09