PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

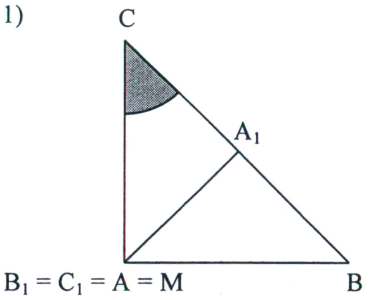
1. príklad

Trojuholník ABC môže byť

1) pravouhlý, 2) ostrouhlý, 3) tupouhlý a) tupý uhol nie je pri vrchole C
b) tupý uhol je pri vrchole C

Rozoberme si každý prípad zvlášť:

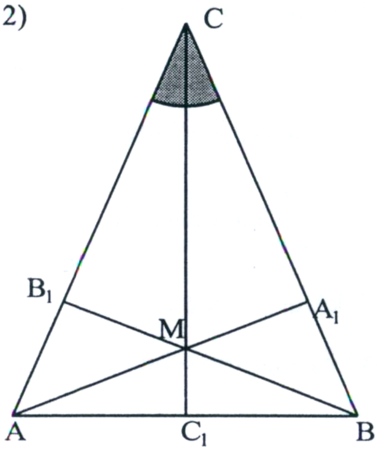
1)



Riešenie je zrejmé. V pravouhlom Δ leží priesečník výšok vo vrchole s pravým uhlom A=M. Ak $|AB| \cong |CM| \cong |CA|$, potom je Δ rovnoramenný a zároveň pravouhlý $\Rightarrow$
$|\angle ABC| = |\angle ACB| = (180° - |\angle CAB|) / 2 = (180° - 90°) / 2 = 45°$

Ak je pravý uhol vo vrchole B, potom uhly pri A a C majú 45°.

2)



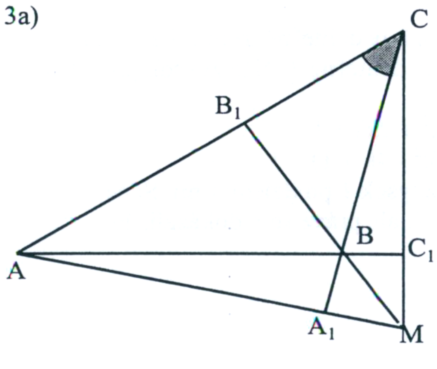
$\Delta CA_1M \sim \Delta AC_1M$ (uu)

$|\angle CMA_1| \cong |\angle AMC_1|$ - vrcholové uhly
$|\angle MA_1C_1| \cong |\angle AC_1M| = 90°$
$\Rightarrow |\angle MCA_1| \cong |\angle MAC_1| \cong |\angle A_1AB|$

$\Delta CMA_1 \cong \Delta ABA_1$ (usu)

$|\angle MA_1C| \cong |\angle AA_1B| = 90°$
$|\angle A_1CM| \cong |\angle A_1AB|$ - z podobnosti ΔCA_1M a ΔAC_1M
$|CM| \cong |AB|$ - zo zadania
$\Rightarrow |AA_1| \cong |A_1C| \Rightarrow \Delta CAA_1$ je rovnoramenný, zároveň je aj pravouhlý (A_1 - päta výšky) $\Rightarrow$ uhly pri základni $|\angle A_1AC| \cong |\angle ACA_1| \cong |\angle ACB| =$
$= (180° - |\angle AA_1C|) / 2 = (180° - 90°) / 2 = 45°$

3a)



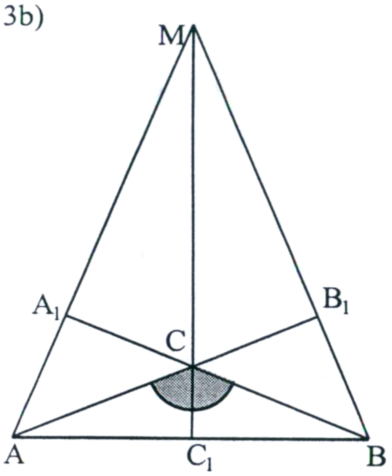
$\Delta ABA_1 \sim \Delta CBC_1$ (uu)

$|\angle BA_1A| \cong |\angle BC_1C| = 90°$
$|\angle ABA_1| \cong |\angle CBC_1|$ - vrcholové uhly
$\Rightarrow |\angle BAA_1| \cong |\angle BCC_1| \cong |\angle A_1CM|$

$\Delta ABA_1 \cong \Delta CMA_1$ (usu)

$|\angle AA_1B| \cong |\angle CA_1M| = 90°$
$|\angle A_1AB| \cong |\angle A_1CM|$ - z podobnosti ΔABA_1 a ΔCBC_1
$|CM| \cong |AB|$ - zo zadania
$\Rightarrow |AA_1| \cong |CA_1| \Rightarrow \Delta ACA_1$ je rovnoramenný, zároveň je aj pravouhlý (A_1 - päta výšky) $\Rightarrow$ uhly pri základni $|\angle A_1AC| \cong |\angle ACA_1| \cong |\angle ACB| = (180° - |\angle AA_1C|) / 2 = (180° - 90°) / 2 = 45°$

3b)



$\Delta MCB_1 \sim \Delta ACC_1$ (uu)

$|\angle MB_1C| \cong |\angle AC_1C| = 90°$
$|\angle MCB_1| \cong |\angle ACC_1|$ - vrcholové uhly
$\Rightarrow |\angle B_1MC| \cong |\angle CAC_1| \cong |\angle B_1AB|$

$\Delta ABB_1 \cong \Delta MCB_1$ (usu)

$|\angle AB_1B| \cong |\angle MB_1C| = 90°$
$|\angle B_1AB| \cong |\angle B_1MC|$ - z podobnosti ΔMCB_1 a ΔACC_1
$|CM| \cong |AB|$ - zo zadania
$\Rightarrow |BB_1| \cong |CB_1| \Rightarrow \Delta BCB_1$ je rovnoramenný, zároveň je aj pravouhlý (B_1 - päta výšky) $\Rightarrow$ uhly pri základni $|\angle B_1BC| \cong |\angle BCB_1| =$
$= (180° - |\angle BB_1C|) / 2 = (180° - 90°) / 2 = 45°$

$C \in AB_1 \Rightarrow |\angle B_1CB| + |\angle ACB| = 180°$

$|\angle ACB| = 180° - |\angle B_1CB| = 180° - 45° = 135°$

2. príklad

Definícia: Pytagorovský trojuholník je trojuholník pravouhlý a dĺžky jeho strán sú celé čísla.

Máme dokázať, že obsah (v pravouhlom trojuholníku je $S=a.b/2$) je deliteľný troma, čiže $S/3 = a.b/6$ je celé číslo. Musíme dokázať, že súčin a.b je deliteľný dvoma i tromi, a tým zároveň dokážeme, že obsah Pytagorovského trojuholníka je celé číslo.

Dôkaz:

deliteľnosť 3 - ak a alebo b je deliteľné 3-mi, tak a.b je deliteľné tromi. Stačí teda dokázať, že nemôže nastať prípad, že a ani b nie je deliteľné 3, čiže zvyšok po delení tromi bude 1 alebo 2.

Môžme písať
$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3.(3k^2 + 2k) + 1$
$(3k + 2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 = 3.(3k^2 - 4k + 1) + 1$

Druhé mocniny čísel nedeliteľných 3-mi dávajú zvyšok 1 po delení 3-mi. Súčet dvoch takýchto čísel dáva zvyšok 2 po delení 3-mi, ale práve sme dokázali, že štvorce dávajú zvyšok 1 a tu tomu nie je tak.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3(...) + 1 + 3(...) + 1 = c^2$$
$$3(...) + 2 = c^2$$

deliteľnosť 2 - dokážeme cez zvyšky po delení 4-mi.

$(4k + 1)^2 = 4(...) + 1$
$(4k + 2)^2 = 4(...)$ - párne
$(4k + 3)^2 = 4(...) + 1$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$4(...) + 1 + 4(...) + 1 = c^2$$
$$4(...) + 2 = c^2$$

3. príklad

Na 1. schod sa môžeme jedným krokom dostať 1 spôsobom. Na druhý z prvého schodu - 1 spôsob a z dola 1 spôsobom - spolu 2 spôsoby.

Na 3. schod - z dola (1 spôsob), z prvého schodu (1 spôsob) a z 2. schodu (2 spôsoby). Teda spolu 1 + 2 + 1 = 4 spôsoby.

Na 4. schod sa môžme dostať z 1., 2., alebo 3. schodu, teda spolu 1 + 2 + 4 = 7 spôsobov. Na piaty 2 + 4 + 7 = 13 spôsobov, atď., až na desiaty zo 7., 8., alebo 9. schodu to je spolu 274 spôsobov.

Poznámka: Na riešenie nepoužívajte vzorce, ktorým nerozumiete, ale oddôvodnite, prečo vzorec platí a prečo ho môžme použiť.

4. príklad

Ako v každej úlohe "zo života" je dôležité si na začiatku riešenia problému ujasniť, aké sú podstatné informácie. Aj taký BOD totiž občas kecá.

Základné údaje o počte jeho krokov sú:	**Čo z toho vyplýva:**
1.) v dekadickom zápise tohto čísla sa nevyskytujú cifry 0,8,9	môžeme použiť len cifry 1,2,3,4,5,6,7
2.) je to najmenšie šesťciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi	použijeme práve 6 cifier z vyššie uvedených, tie usporiadame podľa možnosti od najmenšej po najväčšiu
3.) toto číslo je deliteľné 72-mi	teda aj 2,4,6,8,9-mi,... keďže 72 = 8 . 9 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 (využijeme kritériá deliteľnosti)

Z tohto stručného náčrtu vidím, že môžem použiť práve 6 cifier z možných 1,2,3,4,5,6,7. Ktorú teda nepoužijem? Skúsim šikovne využiť deliteľnosť 72-mi pre hľadané číslo. Ak je hľadané číslo deliteľné 72-mi, je súčasne deliteľné aj tým, čím je deliteľné číslo 72. Teda aj 9-mi. Kritérium deliteľnosti 9-mi mi hovorí, že súčet cifier hľadaného čísla musí byť deliteľný 9-mi. Pre našich 7 cifier je súčet 28 = 1 + 2 + 3 +...+ 7. My vieme, že potrebujeme vyhodiť 1 cifru tak, aby potom súčet 6 cifier bol násobkom 9, teda napr. 9,18,27,36,... Jediná naša šanca je teda nepoužiť cifru 1 (súčet cifier 27), lebo na súčet cifier 18 = 28 - 10 by sme už museli nepoužiť dve cifry, ktorých súčet by dal 10 a ostalo y len 5 cifier. Takže po tejto múdrej úvahe máme k dispozícii cifry 2,3,4,5,6,7. Najmenšie 6-ciferné číslo deliteľné 9-mi s navzájom rôznymi ciframi je 234 567. Je však deliteľné aj 8-mi ? Iste nie, pretože nie je ani párne. Musím v ňom teda zmeniť poradie cifier. Aby sa zachovala podmienka, že hľadané číslo je "čo najmenšie", musím najskôr vymeniť cifry na miestach desiatok a jednotiek, neskôr pri neúspechu stoviek, atď. (pri výmene 10-tok a 1-tiek sa pri čísle s ciframi usporiadanými od najmenšej po najväčšiu - napr. 234 567 - zmení max. o 10, ak však vymením cifry na mieste 100 000-ok a 10 000-ok, zväčší sa takmer o 100 000 !). Skúsim teda číslo 234 576. Je deliteľné 8-mi ? Áno. 234 576 : 8 = 29 322. Tí čo poznajú kritérium deliteľnosti 8-mi (posledné 3-číslie deliteľné 8-mi) mohli skúsiť trojčíslia 576 a 756 a potom to správne trojčíslie k začiatku 234 "prilepiť".

V jednom z riešení sa vyskytla aj takáto myšlienka:

234 567 : 72 = 3258,... . Takže najbližšie 6-ciferné číslo k číslu 234 567 deliteľné 72-mi bude 3259 . 72 = 234 576. A mám šťastie, toto číslo má navzájom rôzne cifry a súčasne neobsahuje cifry 0,8,9. Nezabudnite ale, že také šťastie nemusím mať vždy.

Bod musel prebehnúť 234 576 krokov.

5.príklad

S upravovaním daného výrazu sa nevyskytli väčšie problémy. Niektorým riešiteľom však nebolo známe, čo je to parameter. Bez ohľadu na to, či je pojem parameter známy, či nie, riešenie vyzerá takto:

$$1 / (p + x) + 1 / (p + y) + 2 = (1 + 2p) / p \qquad / .p.(p + x).(p + y)$$

$$p.(p + y) + p.(p + x) + 2.p.(p + x).(p + y) = (1 + 2p).(p + x).(p + y) \quad / -2.p.(p + x).(p + y)$$

$$p.(p + y) + p.(p + x) = (p + x).(p + y)$$

$$p.p + p.y + p.p + p.x = p.p + p.y + p.x + x.y \qquad / -p.p -p.y -p.x$$

$$\underline{\mathbf{p.p = x.y}}$$

Z uvedeného výrazu vidíme, že p delí x.y (x.y je deliteľné číslom p). Kedže p je prvočíslo, je zjavné, že p delí x alebo y prípadne aj x aj y. Výraz p.p = x.y však musí byť číslom p "vydeliteľný dva krát". Z toho dostávame množinu troch riešení:

$$\mathbf{x = p^2} \text{ a } \mathbf{y = 1}$$

$$\mathbf{x = 1} \text{ a } \mathbf{y = p^2}$$

$$\mathbf{x = p} \text{ a } \mathbf{y = p}$$

Množina riešení je zjavne nekonečná a dvojice [x,y] závisia jedine od zvoleného parametra p.