# PIKOMAT
# Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 7-9

### Príklad S1: opravoval Peťo Halák

Veľmi rýchlo sa dá zistiť, že ak by sme zmiešali liter nízkotučného (0,5 %) a liter plnotučného (3 %) mlieka, dostali by sme dva litre mlieka s obsahom tuku 1,75 % (napríklad aritmetickým priemerom obsahov tuku, keďže máme rovnaké objemy). Logicky teda musíme použiť viac nízkotučného ako plnotučného mlieka, aby malo výsledné mlieko obsah tuku 1,5 % (t.j. menší ako 1,75 %). Predpokladajme teda, že použijeme celý liter nízkotučného mlieka a vypočítame, koľko plnotučného k nemu treba priliať. Zostavme si rovnicu, v ktorej M je potrebné množstvo plnotučného mlieka. Na ľavú stranu rovnice si zapíšeme obsahy tuku nízkotučného mlieka (0,005 × 1 liter) a plnotučného mlieka (0,03 × M litrov) a na pravú stranu obsah tuku výsledného nízkotučného mlieka (0,015 × (1+M) litrov): 0,005  1 + 0,03 × M = 0,015 × (1+M) Vypočítame M: M = 10/15 = 2/3.

K jednému litru nízkotučného mlieka treba doliať 2/3 litra plnotučného mlieka, aby sme dostali polotučné mlieko. Nízkotučné a plnotučné mlieko treba miešať v pomere 3:2. Miško mohol namiešať Zuzke najviac 5/3 litra polotučného mlieka. Musel použiť všetko nízkotučné (jeden liter) a zmiešať ho s 2/3 litra plnotučného mlieka. Príklad sa mohol riešiť aj úvahou alebo využitím vedomostí z chémie, resp. fyziky. Mimochodom, obsah tuku v mlieku sa neudáva v mililitroch, ale v gramoch.

Bodovanie: Správne riešenie 5 bodov, ak nebolo uvedené, že sa dalo namiešať 5/3 litra 4 body. Chýbajúci postup, alebo chyby v úvahe 2-3 body podľa závažnosti. Za pokus o riešenie príkladu 1 bod.

### Príklad S2: opravoval Martin Hriňák

Vzhľadom na to, že nás zaujíma len posledné dvojčíslie čísla zo zadania (označme ho A), tak nám stačí zaoberať sa číslom 22001 - 1, pretože 2001 má na mieste desiatok nulu. Keď si vypíšeme posledné dvojčíslia čísel typu 2n, zistíme, že prvé dvojčíslie (pre n=1) je 02, a potom sa dvojčíslia opakujú s periódou 20 (opakujú sa tieto: 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52). Keďže 2001 = 100.20 + 1, vidíme, že 22001 končí posledným dvojčíslím z periódy, teda 52. Potom 22001 - 1 končí dvojčíslím 51, a teda naše číslo A tiež.

Komentár: Častou chybou bolo to, že za periódu ste považovali číslo 21 alebo dokonca 22. Niektorí ste zabudli vypísať, ktoré cifry sa opakujú. Za takéto chyby ste mohli stratiť 1 až 3 body. Za riešenia, ktoré našli poslednú cifru, ste mohli získať 0,5 až 1 bod. Niektorí z vás napísali len tak veľaciferné čísla, bez toho, aby ste napísali, ako ste to vypočítali. Čísla s viac ako 8 číslicami som preto neuznával ako súčasť riešenia (samozrejme okrem výnimiek, kde som to násobenie aj videl).

### Príklad S3: opravoval Ivan Jarík Kohút

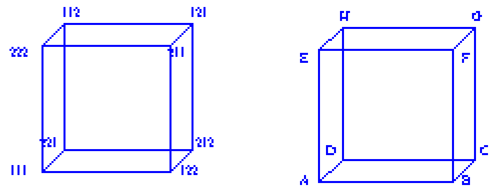
Z cifier 1 a 2 môžeme vytvoriť práve 8 trojmiestnych čísel: 111, 112, 121, 211, 122, 212, 221 a 222.

Je ich práve toľko, koľko vrcholov musíme obsadiť a preto sú všetky rovnocenné. Každému číslu môžeme nájsť práve 4, ktoré sú od neho odlišné v aspoň dvoch cifrách, z toho práve tri, ktoré sú odlišné v dvoch cifrách a jedno odlišné vo všetkých troch cifrách.

Každé číslo na kocke susedí s práve troma inými číslami, a preto aspoň dve z týchto čísel budú od neho rozdielne na práve 2 cifrách. Riešenie si ukážeme na konkrétnom výbere prvého čísla (je jedno, ktoré to bude, všetky čísla sú si rovnocenné). Položme na bod A číslo 111. Na body B a D uložme dve čísla, ktoré sa od 111 líšia na dvoch cifrách, napr. 122 a 221. Teda A = 111, B = 122, D = 221.

Na bod C musíme uložiť také číslo, aby mohlo susediť aj s B a aj s D. Z tabuľky zistíme, že existujú dve také čísla: 111 a 212. 111 sme už uložili, ostalo nám len 212, ktoré bude nevyhnutne na bode C.

Teraz máme uložené 4 čísla: A = 111, B = 122, C = 212, D = 221.* Každému z týchto bodov chýba ešte jeden sused a zároveň každému z týchto bodov ostal práve jeden kandidát na suseda a to tak, že mu ostáva len sused, ktorý je s ním odlišný na troch miestach. Teda body E, F, G, H majú len jednu možnosť na obsadenie: E = 222, F = 211, G = 121, H = 112. Zdá sa vám čudné, že čísla na hornej podstave spĺňajú podmienky? Každé číslo z hornej podstavy má len vymenené cifry oproti jeho susedovi z dolnej podstavy (1 → 2, 2 → 1) ale vzťahy medzi nimi sú zachované.* Vzájomnou výmenou čísel medzi vrcholmi B, C, D dostaneme rôzne riešenia, napr. B = 212, C =221, D = 122, dokopy ich je šesť. Častý problém bol, že ste si náhodne vyberali trojicu čísel hneď okolo 1. vrcholu kocky.




To nesmiete, lebo 4 čísla, s ktorým ten vrchol môže susediť nie sú vzhľadom k vrcholu rovnocenné t. j. tri sa od neho líšia v dvoch cifrách a jedno v troch cifrách. Náhodne si môžete vybrať len dvojicu, ktorej čísla sa od vrcholu líšia práve na dvoch cifrách tak, ako som to hore ukázal.

Bodovanie: tvrdíte, že kocka neexistuje alebo máte zlé riešenie 0b; tvrdíte, že kocka existuje, ale žiadnu ste nenašli 0,3b; riešenie bez postupu 1b; viete, že každé číslo má 4 susedov +0,5b; tvrdíte, že jeden zo susedov prvého vybratého čísla sa musí líšiť vo všetkých cifrách +0,5b; prečo to tak musí byť +0,5b; vypísanie postupu 2,5b; správny postup, ale na začiatku ste náhodne vybrali 3 susedov 4b; jednoznačným postupom ste dospeli aspoň k jednému správnemu riešeniu 5b;

**Príklad S4: opravoval Palo Minárik**

Zuzka potrebovala kruhovú podložku s rovnakým obsahom, ako má jej kúzelná osemcípa hviezda. Teda potrebujeme zistiť obsah hviezdy. Spôsobov, ako sa dal vypočítať, bolo viac. Napríklad sčítať jeden štvorec a trojuholníky, ktoré sú k nemu "prilepené". Úplne najľahšie je sčítať štvorec EFGH a trojuholníky MLC, OND, AIP, JBK. Trojuholníky sú rovnaké, takže stačí vypočítať obsah jedného. Na to potrebujeme výšku. Tú vypočítame ako polovicu rozdielu uhlopriečky štvorca ABCD a strany štvorca EFGH. (Ak to nie je jasné, nakreslite si to.) Podľa Pythagorovej vety je strana štvorca ABCD $\sqrt{200}$, jeho uhlopriečka $\sqrt{(\sqrt{200}^2 + \sqrt{200})} = 20$. Strana štvorce EFGH je $\sqrt{225} = 15$. Teda výška trojuholníka je (20 - 15) : 2 = 2,5. Výška delí trojuholník na dve rovnaké časti. Keď sa spoja, vytvoria štvorec, ktorého stranou je tá výška. To znamená, že obsah tohoto trojuholníka je 2,52 = 6,25. Obsah celej hviezdy je obsah štvorca EFGH a obsah štyroch trojuholníčkov: 225cm$^2$ +&nbbsp;4×6,25 cm$^2$ = 250 cm$^2$.

Bodovanie: výsledok: 2b; postup: 3b; za zaokrúhľovanie: -1b!

**Príklad S5: opravoval Martin Malic Handlovič, vzorové riešenie podľa Emílie Absolonovej**

Označme si symboly písmenkami ( ⇩=A, ☹=B, ⚐=C, ●=D, ✝=E, ↗=F) a odpočítajme predposledný riadok. Dostávame:

```
          B
        E B
      D E B
    C D E B
A B C D E B


F 0 0 0 0 0
```

Všimnime si, keďže A nie je F, zvyšok z tretieho stĺpca + B je 10. Z toho jasne vidno, že B=8, lebo musí byť párne, lebo len 6-násobok párneho číslo dáva na mieste jednotiek to isté číslo. Potom zvyšok zo 6. stĺpca je 4. 4E+4 je deliteľné 10. To platí iba pre E=4 a E=9, čo ale ďalej nevyjde. Zvyšok z 5. stĺpca je 2. 3D+2 je deliteľné 10. To je iba pre D=6. Zvyšok zo 4. stĺpca je 2. 2C+2 je deliteľné 10 iba pre C=9 (lebo C=4 je použité). Takže zvyšok z 2 .stĺpca je 1.Teraz už vieme, že A a F sú dve za sebou idúce čísla a teda to môže byť A=0 F=1, A=1 F=2, A=2 F=3. A čísla sú na svete. ABCDEF 189648, 289648, 389648.

Bodovanie: Veľa z Vás nedostatočne vysvetlilo postup ako ste prišli na konkrétne hodnoty symbolov. Za postup bolo od 0 do 3, 5 bodu, podľa kvality. Za výsledok bolo 1,5 bodu.

4,5 bodové riešenia: Mnoho z Vás malo 4,5 bodu, lebo ste si mylne mysleli, že sú to čísla a teda 0 nemôže stáť na začiatku. No ale sú to len symboly a tie dodržiavajú pravidlá sčítania, teda aj riešenie 189648 je riešenie, aj keď A=0.

**Príklad S6: opravoval Andyš Šramko**

Ahoj decká! V prvom rade by som vás chcel všetkých pochváliť za úspešné zvládnutie tohoto príkladu... ale aj tak je tu vaše obľúbene vzorové riešenie...

Príklad bol pôvodne myslený tak, že synovia si rozdeľovali peniaze postupne... najprv prvý rozdelil to, čo mal, potom druhý aj s tým, čo dostal od prvého atď. Keďže to v zadaní nebolo celkom jasne naformulované, tak som uznával aj také riešenia, ktoré brali do úvahy rozdeľovanie naraz. Ak ste to riešili touto cestou, tak ste sa väčšinou dopracovali k trom rovniciam o troch neznámych:

1. syn $x/2 + y/4 + z/4 = p$
2. syn $y/2 + x/4 + z/4 = p$
3. syn $z/2 + y/4 + x/4 = p$

p - je počet peňazí po rozdeľovaní
x, y, z - sú jednotlivé veky synov

Z týchto rovníc vám po úprave vyšlo, že $x = y = z$. Z toho ste správne usúdili, že sú trojičky. Ďalej bolo potrebné si uvedomiť, že sú to deti (to znamená, že majú menej ako 18 rokov), a že peniaze počas delenia rozdeľujú na štvrtiny. Čiže ak nechcú používať haliere, musí byť ich vek deliteľný štyrmi. Odpoveď: 4, 8, 12, 16. Niektorí dávali aj nulu, ale to by bolo podľa mňa zbytočné... robiť "peňažné transakcie s nula korunami." Tým ktorí to počítali tým zložitejším spôsobom, vyšli veky jednotlivých synov (4, 7, 13) + dostávajú odo mňa verejnú pochvalu za to, že si dobrovoľne vybrali ťažší spôsob počítania.