Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

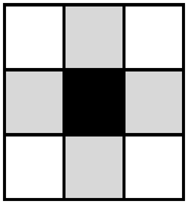
29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Bláznivé kocky. *Opravovala Veronika „Nika" Jankovičová*

Najprv si musíme uvedomiť niekoľko faktov, ktoré vyplývajú zo zadania:

1. Číslo na vrchnej kocke je deliteľné 4, pretože pod ním sa nachádzajú štyri kocky, pričom každá má na sebe rovnakú hodnotu.
2. Spodnú vrstvu môžeme rozdeliť na 3 typy oblastí:



čierna oblasť – toto číslo sa nachádza pod každou kockou zo strednej vrstvy, teda ho pripočítavame až 4krát

sivá oblasť – toto číslo sa nachádza pod 2 kockami zo strednej vrstvy, teda ho pripočítavame 2krát

biela oblasť – toto číslo pripočítavame iba raz, pretože zasahuje len do jednej kocky nad ním

Hľadáme najmenšie číslo, ktoré môže byť na vrchnej kocke. To znamená, že do čiernej oblasti, ktorá ovplyvní toto číslo najviac, musíme dať čo najmenšie číslo. Do sivých oblastí potom dávame ostatné najmenšie čísla, aby sme veľké čísla počítali do súčtu čo najmenej (lebo budú v bielych oblastiach a tie sa počítajú len raz).

Skúsme teda toto: najmenšie číslo je 1, ostatné malé čísla 2, 3, 4 a 5.

Na vrchu by bolo číslo 4x1 + 2x(2+3+4+5) + 6 + 7 + 8 + 9 = 62 -> toto číslo na vrchnej kocke byť nemôže, pretože nie je deliteľné 4 (62 : 4 = 15,5).

Čo teraz? Menšie číslo sa už nedá nájsť, pretože menšie čísla ako 1, 2, 3, 4 a 5 do čierneho a sivých polí dať nemôžeme. Poďme teda nájsť najbližší násobok 4, väčší ako 62. Je to číslo 64. (64 : 4 = 16) Číslo 64 sa dá nájsť 2 spôsobmi a oba ste úspešne našli. ☺

1. spôsob: 4x2 + 2x(1+3+4+5) + 6 + 7 + 8 + 9 = 64

2. spôsob: 4x1 + 2x(2+3+4+7) + 5 + 6 + 8 + 9 = 64

Teraz už len stačí dosadiť čísla 1 až 9 do spodnej vrstvy tak, aby každá štvorica dávala súčet 16 (teda číslo na kocke nad ňou).

Tu sú správne riešenia (samozrejme, môžete ich pootáčať, ale nie prehádzať čísla), horné dve vrstvy sú pri oboch riešeniach rovnaké:

9	1	8
4	2	5
7	3	6

9	2	6
4	1	7
8	3	5

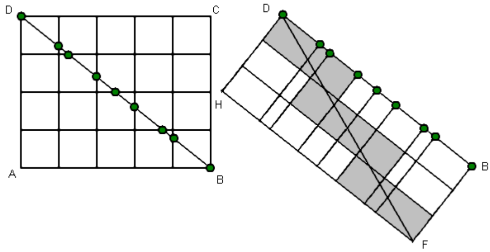
16	16
16	16

64

Odpoveď: Najmenšie číslo na vrchnej kocke môže byť číslo 64.

Bodovanie: 2 body za popis postupu, 2 body za nakreslenie jedného (alebo oboch) správneho riešenia, 1 bod za správnu odpoveď. 0,5 bodov ste mohli získať, ak ste nakreslili pyramídu, ktorá spĺňala podmienky zadania, no na vrchu nemala najmenšie možné číslo(napr. najčastejšie mala číslo 78, 80, 96).

Príklad S2: Pre Elišku. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož*



Ak nemáme po ruke kocky, lepidlo a vŕtačku, ale zato papier, ceruzku a štipku predstavivosti, môžeme postupovať nasledovne. Uvedomíme si, že kváder ABCDEFGH, na ktorý sa pozeráme z vrchu na obr.1, možno (v mysli) rozrezať pílkou na polovicu tak, aby bolo vidno do vnútra. Rezať ho budeme pozdĺž jednej z uhlopriečok vrchnej steny, čo tiež vidno na obrázku. Vznikne nám rez BDHF. Vrt určite prechádza týmto rezom. Rez je nakreslený na obr.2. Vrchná hrana je uhlopriečkou vrchnej steny kvádra. Bočná hrana je hranou kvádra. V reze je vidno aj hrany malých kociek. Vrt DF tvorí uhlopriečku tohto rezu a na obr.2 je vidno, že prechádza cez 10 kociek.

Bodovanie: Za správny výsledok 1 bod, za dobrý postup 3-4 body, slabšie postupy (hoci aj so zlým výsledkom, ale nápad sa počíta) za 1-3 body. Pokusy, ktoré nevedú ku výsledku, ale je vidno aspoň nejaký pokus o začatie som hodnotil za 0.5 bodu.

Príklad S3: Vojaci. *Opravoval Augustin Žídek*

Máme 33 vojakov, z ktorých každý má odslúžených od 1 do 33 rokov. Skúsme sa pozrieť, aký je súčet všetkých ich odslúžených rokov. Potrebujeme teda spočítať čísla od 1 do 33. Matematik je tvor lenivý, a preto to nebudeme sčítať ručne, ale vymyslíme, ako to urobiť jednoduchšie. Čo keby sme si napísali čísla od 1 do 33 do dvoch stĺpcov tak, že vedľa seba bude najmenšie s najväčším, druhé najmenšie s druhým najväčším, a tak ďalej:

Najmenšie	Najväčšie	Súčet
1	33	34
2	32	34
	…	
17	–	17

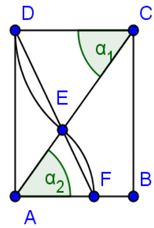
Z tabuľky vidíme, že súčet je v 16 riadkoch rovný 34 a v jednom 17. Tím pádom súčet bude 16x34 + 17 = 561. Toto číslo nás samo o sebe ani tak moc nezaujíma, zaujíma nás skôr jeho parita (či je párne či nepárne) – a vidíme, že je nepárne.

Teraz skúsime zistiť, či nevieme niečo o súčte odslúžených rokov v každej trojici. Pre každú trojicu platí, že súčet odslúžených rokov dvoch vojakov je rovnaký, ako odslúžené roky ostávajúceho vojaka. Povedané inak, v každej trojici sčítame vlastne: *odslúžené roky najstaršieho vojaka + odslúžené roky dvoch vojakov*. Takže vlastne sčítame dve rovnaké čísla(pretože odslúžené roky najstaršieho vojaka = odslúžené roky dvoch zvyšných vojakov). A keď sčítame dve rovnaké čísla, bude výsledok vždy párny(*nepárne + nepárne = párne, párne + párne = párne*).

Dostávame sa konečne k samotnému dôkazu, že to nejde. Súčet všetkých trojíc (kedy je súčet jednej trojice vždy párny) musí byť taktiež párny. Ale súčet všetkých odslúžených rokov všetkých vojakov je nepárny. Tím pádom úloha nemá riešenie a vojaci sa nemôžu týmto spôsobom zoradiť.

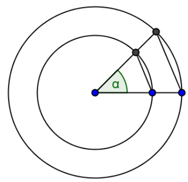
Bodovanie: 0,5 bodu za postreh, že úloha nemá riešenie. 1 bod za pokus o dôkaz, že úloha nemá riešenie. Ďalšie body podľa miery správnosti samotného dôkazu.

Príklad S4: Rozrezaný koláč. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

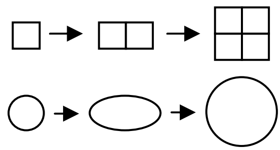


V prvom rade zahodíme všetky predsudky, že tento príklad nevieme vyrátať. Mnohí z vás to zvládli vskutku dobre, za čo ich chválim. Ukážeme si, že na to, aby sme vedeli vypočítať pomer obsahov tých dvoch vyšrafovaných zázrakov (ktoré sa mimochodom matematicky volajú „kruhové odseky“) vôbec nepotrebujeme vedieť, ako sa ráta ich obsah. Veď pomer je len o tom, koľkokrát je ten väčší väčší...

Pozrime sa teda na náš koláč. Správne ste si všimli, že uhly CAB a ACD sú rovnako veľké, pretože uhlopriečka AC delí obdĺžnik ABCD na dva zhodné trojuholníky.

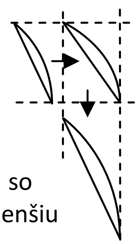


Teraz si spravíme obrázok, na ktorom si oba kruhy (ten s polomerom |DC|=21cm aj ten s polomerom |AF|=14cm) posunieme do jedného stredu. Keďže uhly CAB a ACD sú rovnako veľké, môžeme si kruhy (aj s rezmi cez ne) otočiť tak, aby sa uhly α „prekrývali“.



Teraz na chvíľu odbočíme a pozrieme sa, ako sa zväčšuje obsah útvarov, keď ich zväčšujeme. Napríklad taký štvorec – keď mu zväčšíme šírku 2×, zväčší sa jeho obsah 2×... Ale keď mu zmeníme aj výšku 2×, jeho obsah sa zväčší ešte 2×, čiže celkove sa zvýšil 2×2=4-krá. Všeobecne, keď sa rozmery zväčšia k -krát, tak obsah sa zväčší $k \cdot k$-krát. To isté sa deje aj s kruhmi, keď ich rozťahujeme.

Nuž a vieme, že rezy tvaru kružnicových oblúkov, ktoré mamka spravila, mali polomery 21cm a 14cm, teda boli v pomere $21:14 = 3:2 = \frac{3}{2}$. Takže príslušné kruhy majú obsah v pomere $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ (alebo 9:4, podľa toho, ktorý zápis sa vám páči viac). Kto už pozná vzorec na obsah kruhu, vie to vyjadriť $\frac{\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi\frac{9}{4}r^2}{\pi r^2} = \frac{9}{4}$.



No a teraz prichádza posledná finta – keďže vyšrafované časti predstavujú rovnaké časti svojich kruhov (teda že majú obsah *w*- krát menší, ako je obsah kruhu a je nám jedno, čomu je rovné *w*, ale pre oba útvary je rovnaké), tak ich obsahy budú v rovnakom pomere ako obsahy kruhov. Veď ak obsah jedného je $S_1 = w.S_{kruh1}$ a obsah druhého $S_2 = w.S_{kruh2}$, tak pomer ich obsahov bude $\frac{S_1}{S_2} = \frac{w \cdot S_{kruh1}}{w \cdot S_{kruh2}} = \frac{S_{kruh1}}{S_{kruh2}}$, a to je $\mathbf{\frac{9}{4}}$**,** resp. **9:4,** resp. **2,25:1.**

Druhý spôsob – keď sa nad tým zamyslíme, tak pri zväčšovaní sa to isté, čo so štvorcami alebo kruhmi, deje aj s vyšrafovanými kúskami koláča – keď tú menšiu roztiahneme 3/2 krát v jednom aj v druhom smere, dostaneme tú väčšiu. Takže jej obsah je $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$ väčší.

Bodovanie: Na plný počet bodov ste museli aj zdôvodniť (ako vždy), prečo je ten pomer taký, aký je... Nestačilo povedať, že „lebo je taký pomer obsahov kruhov". Podľa toho, ako ste to nezdôvodnili ste mohli stratiť 0,3-1b. Za správne vyjadrenie pomeru zo vzorcov na obsah kruhu a trojuholníka (teda niečo takéto) bol tiež plný počet bodov len keď ste napísali, odkiaľ sa ten vzorec vzal, a prečo sú uhly v oboch prípadoch rovnaké a pomery výšok také, ako pomery strán.

$$\frac{\left(\pi\left(\frac{3}{2}r_2\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{\frac{3}{2}|AB| \cdot \frac{3}{2}v_{AB}}{2}\right)}{\left(\pi r_2^2 \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{|AB| \cdot v_{AB}}{2}\right)}$$

Príklad S5: Je to pravda?. *Opravoval Michal „Kesy" Kesely*

Tento príklad nerobil nejaké väčšie starosti, najčastejšie chyby nastávali vtedy, keď ste si zle prečítali zadanie.

Radi by sme zistili, že jeden zo sčítancov je deliteľný štyrmi. Podotýkam, že *sčítancov*. To znamená, že výsledok aspoň jedného násobenia čísla samým sebou je deliteľný 4 (malá poznámka na okraj, vynásobenie čísla samým sebou dáva obsah štvorca o danej hrane, preto sa číslo vynásobené samým sebou niekedy nazýva aj *štvorec*).

Súčet dvoch sčítancov je nepárny. To môže nastať jedine v prípade, že jeden zo sčítancov je nepárny a druhý párny (ak by boli oba párne alebo oba nepárne, súčet by bol párny a to nechceme).

Nepárny sčítanec nemôže byť deliteľný 4 a ďalej nás teda zaujímať nebude. Preto by sme chceli, aby bol párny sčítanec deliteľný 4. Nevyzerá to príliš samozrejme, preto si na to posvieťme.

Tento sčítanec je párny, ale zároveň vzniká ako súčin čísla so sebou samým. Teda aj základné číslo musí byť párne (ak by bolo nepárne, *štvorec* by bol tiež nepárny, čo nechceme). Párne číslo vieme napísať ako *2.Č*, kde *Č* je nejaké celé číslo. Čo sa stane keď ho vynásobím samým sebou? Dostanem číslo *(2.Č).(2.Č) = 4.Č.Č*, ktoré je zjavne štvornásobkom celého čísla, a teda aj deliteľné štvorkou. Presne to sme ale chceli ukázať.

Odpoveďou na našu otázku teda je, že tvrdenie je pravdivé.

PS: Číslo 0 je deliteľné 4, pretože *0 = 4.0*

Bodovanie:

2 body za správnu odpoveď, 3 body za kvalitu postupu.

organizátor
korešpondenčného
seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný
Agentúrou na podporu výskumu
a vývoja na základe
zmluvy č. LPP-0375-09