2. 5-ciferné a 2-ciferné
3. 5-ciferné a 3-ciferné
4. 5-ciferné a 4-ciferné
5. dve 5-ciferné čísla

1. možnosť: Každé 1-ciferné číslo je zároveň symetrické. Najbližšie symetrické číslo menšie ako N je číslo 92529. To získame keď od N odčítame 36. Lenže 36 nie je jednociferné číslo. Táto možnosť nevyhovuje.
2. možnosť: Z predchádzajúceho vidíme, že 36 je síce 2-ciferné číslo, ale nie je symetrické. Ďalšie najbližšie symetrické číslo menšie ako 92529 je 92429. To získame keď od N odpočítame 136. Ale 136 nie je ani 2-ciferné a navyše ani symetrické číslo, takže nevyhovuje ani táto možnosť.
3. možnosť: Potrebujeme od N odčítať také symetrické 3-ciferné číslo, aby rozdiel bol opäť symetrické číslo.

$$\begin{array}{ccccc} 9 & a & b & a & 9 \\ & & x & y & x \\ \hline 9 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

Ak odčítame od N najväčšie možné 3-cif. symetrické číslo dostaneme: 92565 – 999 = 91566.
Teda prvá cifra 5-ciferného čísla bude určite 9 a teda aj posledná jeho cifra bude 9. (Zvyšné číslice označme a, b, x, y.)

$$\begin{array}{ccccc} 9 & a & b & a & 9 \\ & & 6 & y & 6 \\ \hline 9 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

Z posledného stĺpca môžeme určiť x: má platiť 9 + x = 5 (taká číslica neexistuje) alebo 9 + x = 15, z čoho x = 6. Číslica a môže byť jedine 1 alebo 2 (nedochádza k prenosu jednotky do ďalšieho rádu). Dopočítaním prídeme k riešeniu: 91919 a 646.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & b & a \\ & x & y & y & x \\ \hline 9 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

4. možnosť: 5-ciferné číslo môže začínať číslicou 8 alebo číslicou 9 (N – 1000 = 91565, N – 9999 = 82566).
Ak a = 9, potom x = 6 (lebo 6 + 9 = 15). Ale súčet takýchto dvoch čísel bude určite väčší ako N (90009 + 6006 = 96015).
Ak a = 8, potom nutne musí platiť x = 7 (7 + 8 = 15). Máme dve možnosti pre b:

$$\begin{array}{ccccc} 8 & b & c & b & 8 \\ & 7 & y & y & 7 \\ \hline 9 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

1) b + 7 = 12, teda b = 5. Dopočítaním zistíme, že y = 0 a c = 5. Dostávame ďalšiu vyhovujúcu možnosť: 85558 a 7007.
2) b + 7 = 11 (ak by z 3. stĺpca zostalo 1), teda b = 4. Dopočítaním zistíme, že táto možnosť nevyhovuje.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & b & a \\ x & y & z & y & x \\ \hline 9 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}$$

5. možnosť:
Ak by bolo N súčtom dvoch symetrických 5-ciferných čísel, tak z prvého stĺpca dostaneme a + x = 9 (resp. a + x + 1 = 9, teda a + x = 8), z posledného stĺpca dostaneme a + x = 5. A také dve čísla a, x ktoré by spĺňali obe rovnosti neexistujú,. Poslednú možnosť môžeme vylúčiť.

Na záver treba povedať, že sme našli dve dvojice symetrických čísel, ktorých súčet bol 92565, nemôžeme teda s istotou povedať, na ktoré dve čísla chlapec myslel.
Bodovanie: Za odhalenie oboch riešení aj s postupom ich objavenia 3 body, za ukázanie, že iné také dvojice neexistujú 1,6 bodu a napokon za správnu odpoveď 0,4 bodu.

Tak to je od nás pre vás ku vzorovým riešeniam všetko, majte sa pekne a riešte, riešte, riešte...

Vaši opravovatelia.

Vzorové riešenia 1. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: opravoval Michal Priky Prikler
Aaaahojte! Tento príkladík dopadol v celku dobre. On vlastne ani nebol ťažký, len bolo treba vyskúšať všetky možnosti. Ale viacerí ste to zvládli vynikajúco! Dalo sa to vyriešiť mnohými spôsobmi – úvahami, preskúšaním všetkých možností a ktovie ako ešte :-). My si tu spomenieme najkratší a najjednoduchší spôsob. Vieme, že muži vypili dohromady 10 šálok, teda ženy vypili 32 – 10 = 22 šálok. Potom zo zadania si môžeme napísať rovničku 22 = 1a + 2b + 3c + 4d, pričom vieme, že a, b, c, d sú čísla od 1 do 4. Možnosť d = 4 môžeme hneď vylúčiť, pretože po najvýhodnejšom dosadení do rovnice dostaneme výsledok 26. Taktiež môžeme vylúčiť možnosť d = 3, pretože v tomto prípade získame výsledok 25, čo je stále veľa. Tak nám ostáva už len preveriť možnosti, keď d = 2 a d = 1.
Ak d = 2:

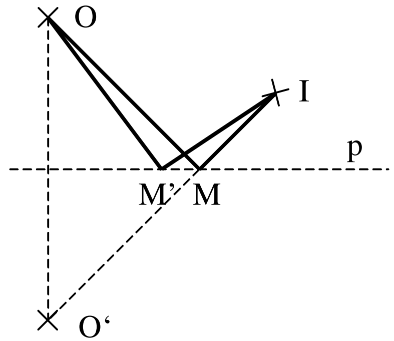
4 + 6 + 3 + 8 = 21;	**3 + 8 + 3 + 8 = 22;**	1 + 8 + 9 + 8 = 26
4 + 2 + 9 + 8 = 23;	3 + 2 + 12 + 8 = 25;	1 + 6 + 12 + 8 = 27;

a ak d = 1:

4 + 6 + 6 + 4 = 20;	3 + 8 + 6 + 4 = 21;	2 + 8 + 9 + 4 = 23;
4 + 4 + 9 + 4 = 21;	2 + 6 + 12 + 4 = 24;	3 + 4 + 12 + 4 = 23.

Keď sa pozrieme na všetky možnosti, zistíme, že len jediná možnosť vyhovuje nášmu zadaniu. A keď si ešte túto možnosť napíšeme násobením ako našu rovničku, vieme už všetko : 1x3 + 2x4 + 3x1 + 4x2 = 22. Výsledok je teda : Tomáš (1š.) ⇒ 3-krát viac vypila Eva; Peter (2š.) ⇒ 4-krát viac vypila Viera; Rudolf (3š.) ⇒ toľko isto vypila Jana; Imrich (4š.) ⇒ 2-krát viac vypila Irena. Najviac ma pobavilo, aké všakovaké mená ste niektorí uvažovali :-). Majte sa krásne!
Bodovanie: za správne riešenie s neúplným komentárom bolo od 2 do 4 bodov, za nepreskúšanie, či riešenie je ozaj správne a vyhovuje celému za daniu boli 3 body.

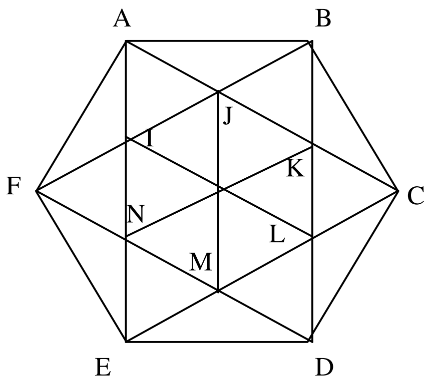
Príklad S2: opravoval Martin MH Hriňák

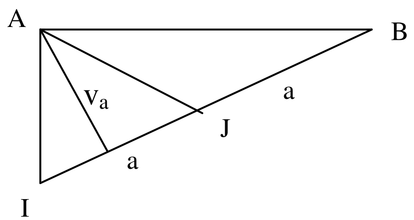


Našou úlohou je minimalizovať $\left|OM\right|+\left|IM\right|$, kde *M* patrí priamke *p* (teda *M* je mama, *O* je odpočinok, I je iglú a *p* je veranda). Prenesme si bod *O* v osovej súmernosti podľa priamky *p* do bodu *O’*. Potom na základe vlastností osovej súmernosti máme, že $\left|OM\right|=\left|O'M\right|$. To znamená, že $\left|OM\right|+\left|IM\right|=\left|O'M\right|+\left|IM\right|$. Ale najkratšia spojnica dvoch bodov je priamka, teda dostávame, že <u>bod *M* musí byť prienikom priamky *p* s priamkou</u> $\overleftrightarrow{O'I}$. Dokážeme to aj inak : nech *M’* je bod rôzny od *M*, pre ktorý je hľadaná vzdialenosť kratšia. Potom na základe trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku *IM’O’* máme, že $\left|O'M'\right|+\left|IM'\right|>\left|O'I\right|=\left|O'M\right|+\left|IM\right|$, čo je v spore s predpokladom, že máme kratšiu cestu.

Komentár: Veľa z vás používalo tvrdenie, že súčet dvoch čísel je minimálny práve vtedy, keď je minimálny súčet ich druhých mocnín (*). Toto tvrdenie neplatí, zoberme si napríklad čísla 5 a 5 – ich súčet je 10 a súčet ich druhých mocnín je 50, a čísla 1 a 8 – ich súčet je 9, ale súčet ich druhých mocnín je 65. Ďalšia skupina riešila príklad tak, že si vybrala niekoľko bodov (minimum 2 a maximum 9), pre ne spočítala dĺžku cesty a najmenšiu vyhlásila za riešenie. Tu ste sa dopustili chyby v tom, že ste nepreskúšali všetky možnosti, že ste zaokrúhľovali, že ste si zvolili za vzdialenosti *O* a *I* od *p* konkrétne čísla...
Bodovanie:
Za správne riešenie 5 bodov. Ak ste skonštatovali, že to bude tak, ako má, bez vysvetlenia, mohli ste dostať 3 body. Ak to bolo so zlým alebo neúplným vysvetlením, mohli ste dostať 2 – 4 body podľa toho, kde ste sa pomýlili. Za riešenia používajúce predpoklad (*) ste mohli dostať 1 bod. Za riešenia konštatujúce, že mama má stáť v strede a iné nesprávne, ste dostali 0 bodov.

Príklad S3: opravovala Alenka Kovárová
Označme vrcholy menšieho 6-uholníka IJKLMN. Zo zadania vieme, že pravidelné 6-uholníky vznikli prekrytím dvoch rovnostranných trojuholníkov (ich uhly sú 60°) Vieme, že uhly pravidelného šesťuholníka (veľkého aj malého) sú 120° a |AB|=|BC|=|CD|=|DE|=|EF|=|FA|. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný, |uhol ABC|=120°, čiže |uhol BCA|=|uhol BAC|=30° (120°+30°+30°=180°). Toto platí aj v trojuholníkoch BCD, CDE, DEF, EFA a FAB. Teraz už vieme dopočítať všetky uhly. Menší šesťuholník si rozdelíme na 6 rovnostranných trojuholníkov. Pretože trojuholníky AIJ, BKJ, CKL, DLM, EMN, FNO majú všetky uhly rovnaké, sú tiež rovnostranné a dokonca sú zhodné s trojuholníkmi z malého šesťuholníka (podľa vety usu). Sú zhodné, teda majú aj rovnaký obsah a aj ich strany sú rovnako dlhé. Ešte nám zostali trojuholníky typu AJB. Tie majú tiež rovnaký obsah ako ostatné trojuholníky, lebo |IJ|=|JB|=a, z toho vyplýva, že $S_{AIJ} = |IJ|.v_a:2 = |JB|.v_a:2 = S_{AJB}$. Teda veľký šesťuholník sa skladá z 18 obsahovo zhodných a menší zo 6 takých trojuholníkov. Obsah ich pomerov je 18:6=3:1.

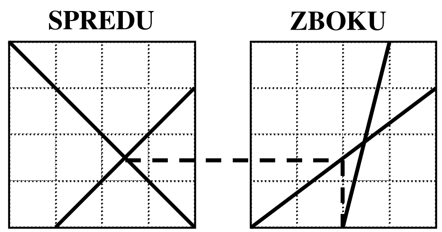




Bodovanie: Tým, čo zabudli podstatnú maličkosť som stŕhala 0,5 bodu a kto to riešil neporiadne (napr. strihaním), tak dostal 3 body.

Príklad S4: opravoval Palo Cvik
Tých siedmich agentov si označme A, B, C, D, E, F, G. Keďže každý z nich sleduje práve jedného a je sledovaný práve jedným, tak si môžeme sledovanie označiť tak, že A sleduje B, B sleduje C, C sleduje D atď až na koniec G sleduje A. Keďže sa sledujú v kruhu je jedno ktorého agenta označíme číslom jedna. Napr. agenta A. Potom vieme, že agent C je druhý agent (lebo 1 sleduje B, ktorý sleduje 2) Takýmto spôsobom si postupne podosadzujeme až dostaneme celý kruh : 1 -> 5 -> 2 -> 6 -> 3 -> 7 -> 4 -> 1
V prípade, že agentov je 8, tak si označíme takisto : A – H a budeme uvažovať rovnako. Nech teda A je prvý agent. Potom je C druhý, E tretí a G štvrtý.
Čiže máme sled : 1 -> B -> 2 -> D -> 3 -> F -> 4 -> G -> 1. Tu ale dostávame spor, lebo 4 má sledovať toho, čo sleduje piateho a nie toho, čo sleduje prvého. To znamená, že úloha nemá riešenie pre 8 agentov.
Mnohí ste si všimli, že úloha nemá riešenie keď je počet agentov párny. Ale na to, aby ste to mohli použiť vo vašich riešeniach to treba dokázať, nestačí to iba overiť pre menšie čísla.
Bodovanie : 2 body za nájdenie riešenia pre 7 agentov, 1 bod za správnu odpoveď pre 8 agentov a 2 body za zdôvodnenie neexistencie riešenia. Nejaké bodíky ste mohli ešte postrácať za chýbajúce komentáre k riešeniam, prípadne používanie vecí vo všeobecnosti, ktoré ste overili iba pre pár konkrétnych hodnôt.

Príklad S5: opravoval Martin Nevagi Vagaský
Ak by sa paličky pretínali, v nejakom bode, musel by tento byť pri pohľade spredu aj zboku v rovnakej výške od podstavy kocky. Keď sa však pozrieme na pohľad spredu, vidíme, že priesečník je presne v strede štvorca 3x3, vo výške 1,5. Pri pohľade zboku je však jedna palička vo výške 1,5 v mieste, v ktorom druhá palička je vo výške 0 a ich domnelý priesečník je preto vyššie. Toto je dostatočný dôvod na to, aby sme mohli tvrdiť, že paličky sa nepretínajú – nemajú spoločný bod.



Bodovanie: 2 b. za správnu odpoveď bez vysvetlenia, 5 b. za správnu odpoveď s úplným vysvetlením, +/- max. 1 b. za správne ale nedokončené/nesprávne úvahy.

Príklad S6: opravovala Dáša Horáková
Vašou úlohou bolo preskúmať, či vieme len na základe poznania súčtu dvoch symetrických čísel zistiť, aké čísla to boli. Najprv sa pozrime na to, aké veľké čísla mohol sčítať. Aspoň jedno z čísel musí byť päťciferné, pretože sčítaním dvoch najväčších štvorciferných čísel 9999 + 9999 dostaneme číslo 19998, čo je menej ako 92565 (pre zjednodušenie toto číslo budem ďalej označovať N). A ešte vieme, že žiadne z čísel nemôže byť šesťciferné. Možnosti teda sú:

1. 5-ciferné a 1-ciferné