Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7-9

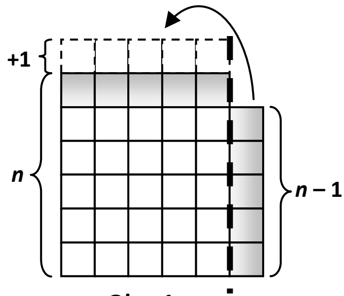
Úloha S1: Buchty. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Počet buchiet v stĺpci/riadku (t.j. stranu štvorca) označíme *n*. Miesto, z ktorého Elisabeth zobrala buchtu, nazveme **diera.**

Poďme zistiť, pre ktoré hodnoty *n* vieme štvorec po odobratí jednej buchty preusporiadať do obdĺžnika širšieho ako jeden rad. Hneď na úvod vylúčime najmenší štvorec 2×2, pretože po odobratí jednej buchty by z neho ostali iba 3 buchty, čo je na požadovaný obdĺžnik očividne primálo. Teraz sa pozrime na väčšie štvorce pre jednotlivé prípady zo zadania.

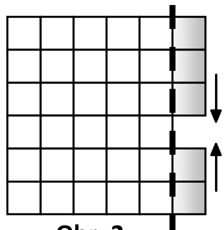
a) ak Elisabeth odobrala rohovú buchtu

Povedzme, že diera je v pravom hornom rohu (keby bola niekde inde, je to len otočený ten istý prípad). Keď si nakreslíme obrázok a chvíľu naň uprene hľadíme, všimneme si, že vedľa diery ostali dva pásy buchiet, jeden vodorovný a jeden zvislý, oba dlhé ($n-1$) buchiet (na Obr. 1 sivé). Stačí teda jeden z nich odrezať, priložiť ho k druhému a už máme obdĺžnik s rozmermi $(n+1)\times(n-1)$ buchiet. Pozri Obr. 1. Potrebovali sme na to iba **jeden rez**.



Obr. 1

Takže pokiaľ ide iba o počet buchiet, tak sa každý štvorec bez jednej buchty (počet buchiet: $n \cdot n - 1$) dá preusporiadať na obdĺžnik, ktorý je oproti pôvodnému štvorcu o jednu buchtu dlhší a o jednu buchtu užší. To vlastne znamená, že každé číslo $n \cdot n - 1$ má dvoch deliteľov väčších ako 1. Veď skús roznásobiť zátvorky $(n+1)\cdot(n-1)$.

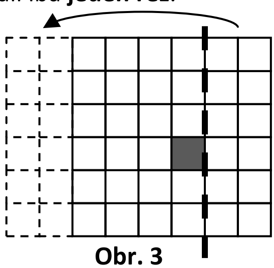

Obr. 2

b) ak Elisabeth odobrala krajnú buchtu

Ak sme vyriešili úlohu a), toto by už nemal byť problém. Spravíme úplne rovnaký rez, ako v úlohe a). Jediný rozdiel bude, že odrezaných ($n-1$) buchiet dostaneme rozdelených na dva kratšie pásy. Tie musíme prisunúť k sebe (Obr. 2), no a zvyšok už poznáme z úlohy a). Opäť sme potrebovali iba **jeden rez**.

c) ak Elisabeth odobrala ktorúkoľvek buchtu

Pre krajné diery sme už úlohu vyriešili, teraz sa venujme už len prípadom, keď sa diera nenachádza na kraji. Stačí však jediný šikovný rez popri diere a vieme buchty preusporiadať tak, ako boli na začiatku úlohy b) – diera sa nachádza opäť na kraji (Obr. 3). Ako už vieme, na úlohu b) je potrebný ešte jeden ďalší rez, takže spolu sme potrebovali **dva rezy**.


Obr. 3

Ešte však musíme ukázať, že jeden rez by isto nestačil – až vtedy si môžeme byť istí, že dva rezy sú skutočne najmenší potrebný počet. Na to si stačí uvedomiť dve vlastne celkom zrejmé veci. Ak nespravíme rez popri diere, diera ostane zachovaná a my musíme isto rezať znova, aby sme vytvorili obdĺžnik. Ak spravíme rez popri diere, dostávame sa prinajlepšom do úlohy b), čo tiež ešte nie je obdĺžnik. Ešte by sa dalo diery zbaviť aj tak, že ju vyplníme jednou buchtou. Tú sa nám však jedným rezom oddeliť nepodarí. Takže nech spravíme prvý rez akýkoľvek, diery sa isto nezbavíme, a teda musíme spraviť ešte aspoň jeden rez. Preto **potrebujeme určite aspoň 2 rezy**. Tým pádom naše riešenie s dvoma rezmi naozaj predstavuje najmenší počet rezov.

Elisabeth dokáže buchty preusporiadať do obdĺžnika pre všetky štvorce so stranou dlhšou ako 2 buchty. Pre krajné a rohové diery na to bude potrebovať 1 rez, pre ostatné diery 2 rezy.

Bodovanie:

vylúčenie štvorca 2×2 – 0,5b.;
časť a) – 1b.;
časť b) – 1,5b.;
časť c) – 1,5b. za konštrukciu pre dva rezy + 0,5b. za dôkaz, že jeden rez nestačí;
za drobné chyby som strhával do jedného bodu.

Úloha S2: Kamienky. *Opravoval Milan „Jimi“ Smolík.*

56 je pomerne malý začiatočný počet, a tak sa na niektoré riešenia dalo prísť aj trochou viac-menej náhodného skúšania. Na tom nie je nič zlé, akurát to so sebou nesie nebezpečenstvo, že nám niektoré z viacerých riešení unikne. Tu si preto skúsime úlohu preskúmať pekne po poriadku, začneme od najmenších čísel.

Čo keď prvý hráč vezme 1 kamienok? To je jednoduché. Až do konca hry bude dovolené brať iba jeden kamienok. Keď dvaja striedavo berú po jednom kamienku z párnej (56) kôpky, je jasné, že posledný kamienok vezme ten, kto nezačínal. Toto sa teda prvému hráčovi neoplatí.

Toto pozorovanie môžeme hneď aj trochu rozšíriť a všimnúť si, že kto ako prvý vezme nepárny počet kamienkov, prehrá. Prečo? Lebo tým vyrobí nepárnu kôpku, z ktorej súper hneď potom vezme jeden kamienok. Pôvodný hráč tým pádom zase začína z párnej kôpky a musí odoberať len po jednom kamienku, takže prehrá. Môžeme preto smelo povedať, že žiaden z hráčov nikdy nezoberie nepárny počet kamienkov: 1, 3, 5, atď. (to zároveň znamená, že kôpka ostane celý čas párna – deliteľná 2).

Čo keď prvý hráč vezme 2 kamienky? Keďže sme už ukázali, že zobrať iba jeden kamienok si nikto netrúfne, je jasné, že až do konca hry sa budú odoberať vždy dva kamienky. Aj tu už ľahko zistíme, ako hra dopadne. $56 = 28 \cdot 2$, takže na kôpke je „párny počet (28) dvojek“ a odoberajú sa iba dvojky. To sa veľmi podobá na prvý prípad, kedy bol na kôpke takpovediac „párny počet (56) jednotiek“ a odoberali sa iba jednotky. Takže ani takýto začiatok sa prvému hráčovi neoplatí.

Keď sú ale tieto prípady také podobné, nedalo by sa aj tu spraviť podobné rozšírenie ako predtým pre všetky nepárne čísla? Veru dalo. Kým minule sme zistili, že zobrať „nepárny počet jednotiek“ znamená prehru, tu to bude podobné: kto ako prvý vezme nepárny počet dvojek, prehrá. Prečo? Lebo tým vyrobí kôpku s nepárnym počtom dvojek, z ktorej súper hneď potom vezme jednu dvojku (dva kamienky). Pôvodný hráč tým pádom zase začína z párneho počtu dvojek a musí odoberať len po dvojkách, takže prehrá. Môžeme preto smelo povedať, že <u>žiaden hráč nikdy nezoberie nepárny počet dvojek: 2, 6, 10, 14, atď.</u> (to zároveň znamená, že na kôpke celý čas ostane párny počet dvojek – bude deliteľná 4).

Čo keď prvý hráč vezme 3 kamienky? Nie, nevezme, pretože to je nepárny počet a my už vieme, že to by znamenalo prehru.

Čo keď prvý hráč vezme 4 kamienky? Už vieme, že zobrať 1, 2 alebo 3 kamienky si nik netrúfne. Takže opäť sa budú až do konca hry odoberať vždy 4 kamienky. Opäť 56 = 14·4, čiže kôpka obsahuje „párny počet štvoriek“. Opäť to znamená prehru prvého hráča. A hlavne: opäť vieme spraviť staré známe rozšírenie: <u>žiaden hráč nikdy nezoberie nepárny počet štvoriek: 4, 12, 20, atď.</u> (na kôpke celý čas ostane párny počet štvoriek – bude deliteľná 8).

Prvý ťah 5, 6 alebo 7 kamienkov sme už vylúčili.

Čo keď prvý hráč vezme 8 kamienkov? 56 = 7·8, čiže kôpka obsahuje „nepárny počet osmičiek“ – konečne zmena! Súper teraz má pred sebou 48 kamienkov a podľa pravidiel môže zobrať 8, 4, 2 alebo 1 kamienok. V 48 je však tohto všetkého párny počet (48 = **6**·8 = **12**·4 = **24**·2 = **48**·1). Nech súper vezme čokoľvek, prvý hráč zakaždým vezme toľko isto (čím ho udrží v párnom počte) a určite vyhrá!

Takže stačí, ak prvý hráč po svojom prvom ťahu nechá na kôpke párny počet osmičiek. To znamená, že **prvý hráč môže v prvom ťahu zobrať 8, 24 alebo 40 (nepárne násobky 8) kamienkov – potom mu stačí na kôpke udržovať párny počet toho, čo súper môže brať, a určite vyhrá**. Ak chceš, môžeš si tieto prípady overiť.

<u>Poznámka</u>:

Vedel(a) by si teraz určiť stratégiu pre začiatočnú kôpku napríklad 240 kamienkov? (Nápoveda: 56 = 2·2·2·7; 240 = 2·2·2·2·15).

<u>Bodovanie</u>:

zákaz nepárneho počtu – 0,5b.;
aspoň jeden víťazný prvý ťah – 1,5b.;
popis stratégie – 1b.;
ukázanie, prečo je stratégia naozaj víťazná – 2b.;
rôzne zaujímavé myšlienky a poznatky – plus 1b.;
chyby a myšlienkové skoky – mínus 0,5b.

<u>Úloha S3: Omyl. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*</u>

Pre lepšiu orientáciu v ďalšom texte si definujme 4 vzájomne vynásobené čísla ako *Ac*, *Ad* – **c**elá a **d**esatinná časť prvého pôvodného čísla *A*, a tiež *Bc*, *Bd* – **c**elá a **d**esatinná časť druhého pôvodného čísla *B*.

Aké 4 čísla mohla tá nešťastná predavačka vynásobiť? Vieme, že ich súčin je 324. Pozrime sa na to, ktorými číslami je tento súčin deliteľný, aby sme mali aspoň predstavu, z akých častí sa pôvodné desatinné čísla mohli skladať. Po chvíli trpezlivého zisťovania sa dopracujeme ku číslam 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 324. Toto všetko sú čísla, ktoré delia 324, a teda kandidujú na pozíciu celej alebo desatinnej časti v pôvodných dvoch číslach. Urobme teraz tri jednoduché úvahy, ktoré nám zredukujú počet kandidujúcich čísel.

Číslo 23,37 má 2 desatinné miesta. Pôvodné čísla *A*, *B*, ktoré sa mali vynásobiť, musia preto mať dokopy 2 desatinné miesta (spomeňte si, ako sa násobia desatinné čísla pod sebou – na záver oddelíme toľko desatinných miest, koľko bolo dokopy v oboch číslach). Inakšie povedané, *Ad* a *Bd* majú dokopy 2 cifry. A každé z nich aspoň jednu (inak by *A*, *B* neboli desatinné čísla). Takže tu pripadajú do úvahy len 1, 2, 3, 4, 6 alebo 9. Tu nám situáciu s počtom desatinných miest ešte môže skomplikovať jeden nepríjemný fakt – ten je rozriešený v poznámke na konci vzorového riešenia.

Číslo 23,37 sa končí na 7. Opäť si predstavíme, ako by sa násobili pôvodné 2 čísla pod sebou, a uvedomíme si, že tá 7 na konci nevznikla len tak náhodou. Musela vzniknúť vynásobením posledných dvoch číslic v číslach *Ad* a *Bd*. Presnejšie, 7 vznikne buď ako 1·7, alebo 3·9. Jednotka však nepripadá do úvahy, lebo k nej nemáme potrebnú sedmičku. Týmto pádom sme čísla *Ad* a *Bd* obmedzili už len na 3 a 9.

Teraz, keď máme *Ad* a *Bd*, dajme tomu, nech je *Ad* = 3 a *Bd* = 9. Násobok týchto čísel je 27, do 324 nám treba vynásobiť ešte 12-tkou. Z toho vyplýva, že *Ac*·*Bc* = 12. Pohľadom na možnosti jednotlivých čísel zistíme, že čísla *Ac* a *Bc* musia byť buď 1 a 12, alebo 2 a 6, alebo 3 a 4, a to v zatiaľ neurčenom poradí. Vskutku rýchlo preveríme týchto zopár možností a víťazoslávne objavíme, že *Ac* musí byť 12 a *Bc* musí byť 1.

Predavačka mala násobiť 12,3·1,9 = 23,37, miesto toho však vynásobila 12·3·1·9 = 324.

Poznámka k počtu desatinných miest:

Takmer všetci (česť pár výnimkám) ste vo svojich riešeniach smelo tvrdili, že čísla *A*, *B* musia mať po jednom desatinnom mieste, inak by sme nedostali po ich vynásobení číslo s dvomi desatinnými miestami. Tento predpoklad je chybný, pretože my vlastne nevieme, koľko desatinných miest to číslo skutočne má. Na jeho konci si môžeme predstaviť ľubovoľný počet núl, ktoré sa nezapisujú, lebo nemenia hodnotu čísla. Keď vynásobíme 2,75·3,24, dostaneme 8,9100, čo je vlastne 8,91. Nás sa tento problém našťastie netýka. Nuly na konci môžu vzniknúť iba ak by jedno z čísel *Ad*, *Bd* bolo deliteľné 5 a druhé deliteľné 2. Alebo ak by jedno z nich končilo nulou (bolo deliteľné 5 aj 2 zároveň). Medzi deliteľmi 324 sa však nenachádza číslo 5.

Obdobným problémom by sa mali zaoberať tí z vás, ktorí začali rozkladať 2337 (23,37 bez desatinnej čiarky). Neviete totiž, či máte rozkladať 2337, 23370, 233700, atď.

Vzhľadom na tak veľký počet tých, ktorí si tento problém neuvedomili, a zároveň vzhľadom na to, že to neovplyvňuje riešenie tohto príkladu, nebude tým ovplyvnené ani bodovanie. Berte to však ako novú vedomosť, novú okolnosť, na ktorú by ste odteraz mali dbať.

Bodovanie:

správne riešenie – 1b.;
postup – 4b.;
nesmelo chýbať preskúmanie všetkých možností, či už mechanickým hľadaním, alebo pomocou úvah popísaných vyššie;
za nevhodne zvolený systém skúmania možností, ktorý viedol k nepreskúmaniu niektorých možností, som strhával 0,5b. a viac – podľa závažnosti.

Úloha S4: Peňaženka. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Predtým, ako prišla slečna Elisabeth a pridala svoje 1 penny, bolo v peňaženke 10 mincí, z toho jedna mala hodnotu 2 penny. Keby všetkých 9 neznámych mincí malo najvyššiu možnú hodnotu, 10 penny, v peňaženke by bolo $9 \cdot 10 + 2 = 92$ penny. Keby mali najmenšiu možnú hodnotu, 1 penny, v peňaženke by bolo $9 \cdot 1 + 2 = 11$ penny. Takže v peňaženke isto nebolo menej ako 11 ani viac ako 92 penny.

V tomto rozmedzí teraz potrebujeme nájsť také číslo, ktoré po zväčšení o jedna (pridanie Elisabetinho penny) bude deliteľné 3, 4, 5 aj 6 – to aby sa každému chlapcovi ušla celočíselná výplata. Najmenším spoločným násobkom týchto čísel je 60 (najbližší väčší spoločný násobok je 120, čo už je priveľa). Z toho vyplýva, že v peňaženke muselo na začiatku byť 59 penny.

Po tom, ako Elisabeth pridala svoje 1 penny, mohla rozdeliť štyrom chamtivcom peniaze podľa ich predstáv: Perry dostal $60/3 = 20$ penny; Hercule dostal $60/4 = 15$ penny; Ellery dostal $60/5 = 12$ penny; Peter dostal $60/6 = 10$ penny. Spolu dostali 57 penny. To znamená, že keď si Elisabeth zobrala späť svoje 1 penny, v peňaženke jej ostala minca 2 penny.

V zadaní sme sa však pýtali, koľko mincí jednotlivých hodnôt bolo v peňaženke, keď ju chlapci našli! Už vieme, že tam bolo dokopy 59 penny a že jedna z desiatich mincí bola 2 penny. Zostáva 57 penny, ktoré treba poskladať z 9 mincí hodnôt 1, 5 a 10 penny. Okrem toho sa daných 9 mincí musí dať rozdeliť na 4 kôpky s hodnotami 20, 15, 12 a 10 penny. Pretože inak by ich Elisabeth nemohla rozdať chlapcom, a teda by to nemohlo byť riešením tejto úlohy.

Pre začiatok skúsme výplatu každého chlapca poskladať z čo najmenej mincí. Ak sa nám to podarí na menej ako 9 mincí, skúsime počet mincí nejako zvýšiť – uvidíme. Bez dlhých rečí sa dá prísť na to, že najjednoduchšie je to takto: **20** = 10+10; **15** = 10+5; **12** = 10+1+1; **10** = 10. To je 5-krát 10 penny, 1-krát 5 penny a 2-krát 1 penny, spolu teda 8 mincí. Jediná možnosť, ako zvýšiť počet mincí na deväť, ale nepokaziť pritom celkový súčet (57), je rozdeliť niektorých 10 penny na 2-krát 5 penny. U ktorého chlapca konkrétne sa tak stane, už nie je dôležité, na to sa zadanie nepýta. Hurá, máme 57 penny v deviatich minciach.

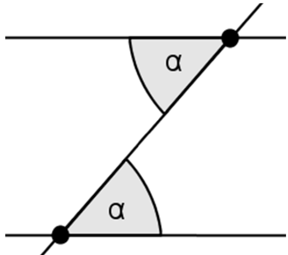
V peňaženke boli na začiatku 4 mince 10 penny, 3 mince 5 penny, 1 minca 2 penny a 2 mince 1 penny.

Bodovanie:

zistenie, že rozdeliť sa dá jedine 60 penny (a nič iné) aj s postupom – 2b.;
správne mince v peňaženke s odôvodnením, prečo tam iné byť nemohli – 3b.

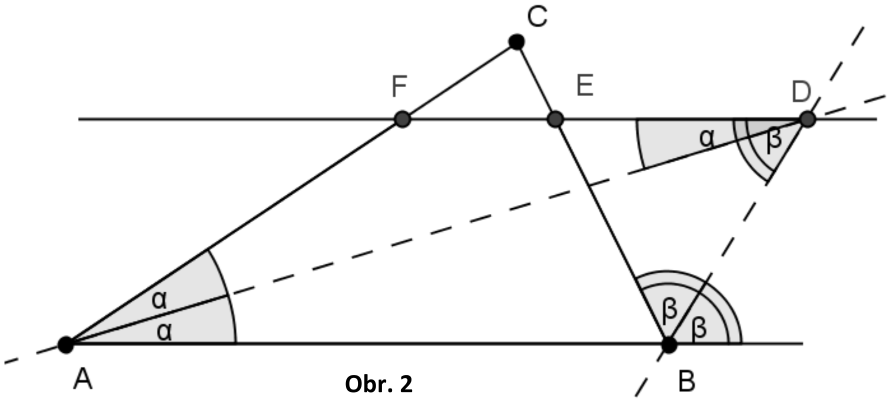
Úloha S5: Kanalizácia. *Opravoval Samuel „Kačka“ Cibulka.*

V zadaní sú dané osi dvoch uhlov, teda priamky deliace každý z týchto uhlov na dva, ktoré majú polovičnú veľkosť. Vieme, že priamky FE a AB sú rovnobežné. Keď pretneme rovnobežky nejakou priamkou, dostaneme dvojicu takzvaných striedavých uhlov, ktoré majú rovnakú veľkosť (Obr. 1).



Obr. 1

Vráťme sa k zadaniu a označme si uhol DAB ako α. Teraz môžeme doplniť uhly, ktoré sú rovnaké buď vďaka osi uhla, alebo kvôli tomu, že sú striedavé (Obr. 2). To isté urobíme aj s druhým uhlom rozdeleným osou na polovice, pričom uhly rovnakej veľkosti si označíme β (Obr. 2).



Obr. 2

Trojuholník ADF má pri strane AD dva rovnaké uhly (α) a trojuholník BDE má zas rovnaké uhly pri strane BD (β). Preto sú tieto trojuholníky rovnoramenné, a teda platí |FA| = |FD| a |EB| = |ED|. Teraz už konečne môžeme využiť dĺžky strán zo zadania a dostávame |FD| = 7km a |ED| = 5km. Vzdialenosť čerpadiel F a E od seba už potom získame jednoducho ako |FE| = |FD| – |ED| = 7km – 5km = **2km**.

Bodovanie:

akékoľvek správne riešenie s vysvetlením – 5b.;

ak ste si poplietli nejaké uhly – mínus 0,1 až 0,5b.;

nedostatočne popísané riešenia – 2 až 4,5b.;

za riešenia, kde ste hľadanú vzdialenosť odmerali alebo iným nesprávnym postupom prišli k nesprávnemu výsledku – 0,5 až 2b. (podľa toho, ako ďaleko ste sa dopracovali).

P-MAT n.o.®

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.