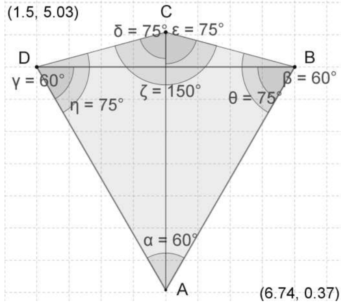
PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

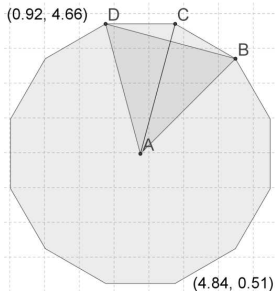
Príklad S1: Časová loď. *Opravoval Branislav „Hlubik" Hlubocký.*



Vieme, že v našom deltoide sú strany AB, AD a uhlopriečky AC, BD rovnako veľké. Trojuholník ABD je teda rovnostranný a trojuholníky ABC a ACD sú rovnoramenné. Súčet vnútorných uhlov v ľubovolnom trojuholníku je 180°. Keďže trojuholník ABD je rovnostranný, všetky jeho uhly majú (180°/3) = 60°.

Trojuholníky ABC a ACD sú rovnoramenné a zhodné. Strana AC teda delí uhol pri vrchole A na polovicu. Uhly BAC a CAD majú teda veľkosť 30°. Ako sme už spomenuli, trojuholníky ABC a ACD sú rovnoramenné a zhodné. Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú rovnako veľké. Veľkosť uhlov ABC, BCA, ACD a CDA je (180° - 30°)/2=75°. Uhol BCD sa skladá z uhlov BCA a ACD a má teda 150°.

Uhol DAB=60°; uhol ABC=75°; uhol BCD=150°; uhol CDA=75°.



Náš deltoid sme si taktiež mohli predstaviť ako 1/6 z pravidelného 12 uholníka. Uhol pri vrchole C má teda veľkosť (n-2)*(180°)/n = 10*180°/12 = 150°. Uhol pri vrchole A má veľkosť (360°/6) = 60°. A nakoniec uhly pri vrcholoch B a D. Keďže náš výsek je štvoruholník, súčet vnútorných uhlov bude 360°, takže tieto uhly budú mať veľkosť (360°-150°-60°)/2 = 150°/2 = 75°.

Príklad S2: Pyramída. *Opravoval Augustin Žídek.*

Pyramida, a ještě k tomu dutá, to zní jako docela komplikované počítání. Kdyby si člověk nevymyslel nějaké zlepšení, tak by to doopravdy bylo hodně čísel k promyšlení.

1. OBJEM: Je více způsobů, jak tohle počítat, jako efektivnější mi připadá spočítat počet kostek v plášti a vynásobit ho objemem jedné kostky. Počet kostek v plášti ale nebudeme počítat po jedné, protože to by bylo zdlouhavé. Podívejme se, jak přibývají kostky v jednotlivých patrech pláště. Nahoře je jedna kostka. Pod ní čtyři. Pak 8, 12, 16, atd. Zřejmě v dalším řádku přibudou vždy čtyři kostky. Toto tvrzení je ale třeba nějak dokázat. Doopravdy tak tomu je, protože na každém patře je délka hrany pyramidy o jedna delší než v patře nad ním a pyramida má čtyři stěny. Do každé stěny musí přibýt jedna kostka, přibude-li patro. Naše domněnka tedy platí. Kostek je proto: *1+4+8+12+16+20+24 = 85*. Objem jedné kostky je *30×30×30 = 27 000*m^3. Objem vápencového pláště je *27 000×85 =* **2 295 000**$\mathbf{m^3}$.

2. POVRCH: Ten budeme počítat tak, že si ho rozložíme na několik částí: 1. část, kterou vidíme seshora, 2. část, kterou vidíme zezdola, 3. část, kterou vidíme zboku zvenčí a 4. část, kterou vidíme zboku zevnitř. Půjdeme popořadě:

1. Pokud se na pyramidu podíváme doopravdy seshora, vidíme čtverec 7×7 kostek. I povrch pyramidy, který je vidět seshora, tedy bude: *7×7×(povrch jedné stěny = 30×30 = 900*m^2*) = 44 100*m^2.

2. Zezdola vidíme úplně to samé, co seshora, protože žulové jadro jakoby tam nebylo. Povrch viditelný zezdola bude tedy rovněž *44 100*m^2.

3. Naše pyramida má čtyři boky, které jsou stejné. Můžeme se tedy klidně podívat jenom na jeden z nich a spočítat jeho povrch. Ten pak znásobíme čtyřmi. Kolik vidíme zboku kostek? No přece *1+2+3+4+5+6+7 = 28*. Povrch zboku je tedy *28×30×30 = 25 200*m^3. Boky jsou čtyři, takže ještě musíme znásobit čtyřmi: *25 200×4 = 100 800*m^3.

4. Co vidíme, když si vlezeme do pyramidy (za předpokladu, že tam není žulové jadro)? Vidíme otvor, který odpovídá velikostně žulovému vnitřku. Jaký je tedy povrch žulového vnitřku zboku? Počítá se samozřejmě velmi podobně jako v případě 3., ale žulová pyramida je **o dvě** (ne jen o jedno!) patra nižší, protože ani do vrchního patra a ani do druhého nejvrchnějšího patra se žulový vnitřek dát nedá. Povrch bude: *(1+2+3+4+5)×30×30×4 = 54 000*m^2.

Už jenom zbývá tyto čtyři výsledky sečíst: *44 100+44 100+100 800+54 000 =* ***243 000***m^3.

Bodovanie:

nesprávný objem – mínus *2*b.; nesprávný povrch – mínus *2*b.; numerické (výpočetní) chyby při jinak správném postupu – mínus *0,5*b.

Príklad S3: Astronómov stan. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

V zadaní príkladu sme mali niekoľko veľmi dôležitých informácií, ktoré nás mali nasmerovať na správne riešenie. Keďže stan mal 17 stien a jednu podstavu, obsahoval dokopy 18 čísel. Všetky čísla na začiatok boli neznáme a mohli byť hocijaké. Prvá dôležitá informácia bola, že súčet týchto 18-ich čísel je 96. Avšak ako mnoho z vás správne poznamenalo, takých 18 čísiel nájdeme nekonečne veľa. Druhá a dovolím si povedať, že oveľa dôležitejšia informácia bola, že čísla v každom jednom rohu sú rovnaké. Len pre poriadok, číslo v rohu sme dostali tak, že sme spočítali čísla na stenách, ktoré sa toho rohu dotýkali.

Poďme sa najskôr bližšie pozrieť na čísla, ktoré sú na stenách. Povedzme že podstava bude **x**. Označme si nejakú prvú stenu napríklad ako **a** a tú vpravo od nej ako **b**. Teda hodnota na spoločnom vrchole týchto strán a podstavy je rovná: **a**+**b**+**x**.

Dajme tomu, že ďalšia strana v poradí bude **c**. Teda roh medzi **b** a **c** bude mať hodnotu rovnú: **b**+**c**+**x**. Ale čísla na tých rohoch by sa mali rovnať! Čiže **a+b+x = b+c+x**, z čoho nám automaticky vyplýva, že **c** = **a**. Hurá, zbavili sme sa 17 neznámych čísel a už máme len podstavu **x** a strany **a** a **b**, ktoré sa nám na plášti stanu striedajú. Avšak tu sa dostávame opäť do zaujímavej situácie: stan má 17 strán a preto pri striedaní čísel a,b,a,b,a... na konci narazíme na to, že pri jednom rohu máme zrazu dve steny s hodnotou **a**. Teda nastala situácia, že **a**+**a**+**x** = **a**+**b**+**x** a z toho nám jednoznačne vyplýva, že **a** = **b**. No a táto informácia je úplne super, pretože teraz vieme, že čísla na plášti majú všetky rovnakú veľkosť a zredukovali sme počet neznámych hodnôt na dve: **a** a **x**.

Takže vieme, že súčet všetkých čísel na stane je

$$17\mathbf{a}+\mathbf{x} = 96$$

Tiež vieme, že číslo na vrchole stanu sa rovná 17**a**, ale číslo na spodnom rohu stanu je 2**a**+x. Tieto musia byť rovnaké, teda:

$$17\mathbf{a} = 2\mathbf{a}+\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x} = 15\mathbf{a}$$

Máme vyjadrené, čomu sa rovná podstava, a to môžeme dosadiť si to do prvej rovnice:

$$17\mathbf{a}+15\mathbf{a} = 96$$
$$32\mathbf{a} = 96$$
$$\mathbf{a} = 3$$

No a keď už vieme, čomu sa rovná číslo na stene stanu, jednoducho dopočítame aj hodnotu podstavy:

$$\mathbf{x} = 15\times3 = 45.$$

A teda odpoveď na otázku je, že na stenách stanu bolo napísane číslo 3 a na jeho podstave číslo 45.

Bodovanie:

strhával som body hlavne za neporiadne vysvetlenie, prečo čísla na plášti musia byť rovnaké.

Príklad S4: Stanové mestečko. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Určite so mnou budete súhlasiť, že postaviť koryto na ľavý alebo pravý kraj „mapy“ (t.j. na okraj papiera) nemá zmysel. Veď už len tým, že koryto posunieme centimeter od okraja, skrátime všetky kanáliky presne o centimeter. Toto je dôležité si uvedomiť – ak posunieme koryto, všetky kanáliky sa skrátia rovnako.

Ak by sme mali koryto medzi 4. a 5. stanom zľava (tam je dosť široká medzera, takže si to ukážeme na nej) a posunuli by sme koryto o centimeter doprava, čo by sa stalo? Kanáliky naľavo od koryta by sa o centimeter predĺžili, kanáliky napravo by sa o centimeter skrátili. Všetky o rovnakú dĺžku! Ale tých, čo by sa skrátili, by bolo viac, takže by to bolo výhodné.

Keď budeme posúvať koryto ešte viac doprava, budú sa všetky kanáliky vpravo od neho skracovať, a tie vľavo predlžovať. Takže posúvame ďalej doprava, až kým... **Keď**

máme koryto niekde medzi 9. a 10. stanom, je vľavo od neho 9 stanov aj vpravo od neho 9 stanov, takže pri posúvaní koryta medzi týmito dvoma stanmi platí, že o čo sa polovica kanálikov skráti, o to sa druhá polovica predĺži.
Keby sme koryto posunuli ešte viac doprava, tak už by sa predlžovalo viac kanálikov, ako by sa skracovalo, takže za 10. stan zľava sa nám ísť veru neoplatí.
Najkratšia celková dĺžka kanálikov bude vtedy, ak bude hlavné koryto hocikde medzi 9. a 10. stanom (vrátane prípadov, že ide cez jeden z týchto stanov).

Bodovanie:

podľa toho, ako ste zdôvodnili výber miesta pre koryto.

Príklad S5: Dĺžka cesty. *Opravoval Petra „Peťa“ Vlachynská.*

O čom hovoria jednotlivé pomery? Ak ab:bc = 1:3, potom platí, že 3×ab = bc. Takisto ak bc:cd = 2:1, potom 2×cd = bc. Z toho vyplýva, že bc musí byť deliteľné dvoma aj troma, teda musí byť deliťeľné šiestimi. Vieme, že bc je dvojciferné číslo, vypíšme si teda všetky dvojciferné čísla deliteľné šiestimi. Keďže bc = 3×ab, pod tieto násobky šestky si môžme rovno vypísať príslušnú hodnotu čísla ab, teda pod každé číslo napíšeme výsledok po delení troma.

bc	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
ab	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32

Po pozornom preskúmaní tabuľky zistíme, že stĺpce, v ktorých v číslach ab a bc má cifra b rovnakú hodnotu, sú dva: bc = 42, ab = 14 a bc = 84, ab = 28. Pre tieto možnosti teraz treba ešte overiť, či sedí aj pomer bc:cd = 2:1. 42/2 = 21, cifra c je teda rovnaká v číslach bc i cd a 84/2 = 41, teda cifra c sa znovu v oboch číslach rovná. Riešením úlohy sú teda dve vzialenosti: **1421 a 2842**. Tu mnohí z vás vyhlásili, že úloha nemá riešenie, pretože a = d. Ale pozor! To, že sú cifry označené iným písmenom, neznamená, že nemôžu mať rovnakú hodnotu, pokiaľ to v zadaní nie je uvedené inak.

Bodovanie:

výsledok (obe vzdialenosti) – 2b.; úplný postup – 3b.; tvrdenie, že úloha nemá riešenie, lebo sa opakovali cifry – mínus 0,5b.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára