Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Dierovacie preteky. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

V prvom rade si zavedieme nejaké rozumné krátke označenia:

Rýchlosť počítača PEAR .... označíme ***P***.
Rýchlosť počítača RASPBERRY ..... označíme ***R***.
Kvalitu Modrej dierovačky.......... označíme ***M***.
Kvalitu Červenej dierovačky .... označíme ***C***.

Pritom, ako sa v zadaní píše, kvalita dierovačky znamená počet riadkov, ktoré vydieruje jedným úderom, a rýchlosť počítača znamená počet úderov, ktoré spraví za sekundu.

Ako prvé sa zo zadania dozvedáme, že modrá dierovačka je lepšia ako červená, takže

$$M > C.$$

Ďalej sa dočítame, že v prvom kole počítač PEAR používal modrú dierovačku a počítač RASPBERRY používal červenú. A oba toho vydierovali rovnako veľa, takže dierovali rovnako rýchlo. To vieme zapísať takto:

$$P{\cdot}M = R{\cdot}C.$$

Už keď sa pozrieme na tieto prvé dve informácie, je nám jasné, že z týchto počítačov je PEAR ten pomalší. Prečo? No pretože aj keď mal lepšiu dierovačku, dieroval rovnako rýchlo ako RASPBERRY, ktorý mal horšiu. Takže

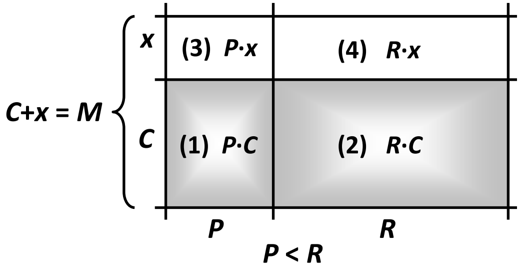
$$P < R.$$

V druhom kole si dierovačky vymenili a tentokrát PEAR dieroval dvakrát pomalšie ako RASPBERRY. Na tom nie je nič prekvapivé, veď predsa pomalší počítač dostal horšiu dierovačku a rýchlejší dostal tú lepšiu. Otázka však znela, v ktorom kole toho dokopy vydierovali viac. Pozrime sa na to:

V 1. kole dokopy vydierovali: $P{\cdot}M + R{\cdot}C.$
V 2. kole dokopy vydierovali: $R{\cdot}M + P{\cdot}C.$

Teraz si pomôžeme malou fintou. Keďže s nerovnicami sa niekedy pracuje trochu ťažko, prepíšeme si jednu nerovnicu na rovnicu. Je to jednoduché. Vieme, že $M > C$, ale teraz si to zapíšeme takto: $\boldsymbol{M = C + x}$, pričom x je nejaké kladné číslo (nevieme presne aké, ale to nevadí). Teraz všade za M dosadíme tento výraz a dostaneme:

V 1. kole: $P{\cdot}M + R{\cdot}C = P{\cdot}(C+x) + R{\cdot}C = P{\cdot}C + P{\cdot}x + R{\cdot}C.$
V 2. kole: $R{\cdot}M + P{\cdot}C = R{\cdot}(C+x) + P{\cdot}C = R{\cdot}C + R{\cdot}x + P{\cdot}C.$



Tu už vidíme všetko, čo potrebujeme. A aby sme to videli ešte lepšie, ukážeme si to aj na obrázku. V oboch kolách sa nachádzajú členy $P{\cdot}C$ aj $R{\cdot}C$. Na obrázku sú to sivé plochy označené (1) a (2). V čom sa kolá líšia, to sú členy $P{\cdot}x$ a $R{\cdot}x$, na obrázku plochy (3) a (4). No a my si pamätáme (a tiež vidíme na obrázku), že $\boldsymbol{P < R}$, a teda samozrejme aj $\boldsymbol{P{\cdot}x < R{\cdot}x}$. A z toho jasne vyplýva, že **počítače toho dokopy viac vydierovali v 2. kole.**

Bodovanie:

akokoľvek správne odargumentované riešenie – 5b.;
neúplné tvrdenia, ale správny výsledok – mínus 1-2b.;
slabá argumentácia, uvedenie iba výsledku alebo iné nelogické postupy – max. 3b.

Poznámka:

Všimnite si, že sme vôbec nepotrebovali informáciu z druhého kola, že RASPBERRY vydieroval dvakrát toľko ako PEAR.

Okrem toho: toto celé sa dalo vysvetliť aj pomerne jednoduchým zamyslením. Uvedomme si, že rýchlosť počítača je stále rovnaká. To zároveň znamená, že každý počítač spravil v oboch kolách rovnaký počet úderov. Čiže – a to je to najdôležitejšie – v oboch kolách padol dokopy rovnaký počet úderov! Síce väčšiu časť z nich spravil RASPBERRY a menšiu časť spravil PEAR, ale opakujem: Celkový počet úderov v jednom kole je vopred daný.

Otázne je už len to, akou dierovačkou sa tieto údery uskutočnia, a teda koľko riadkov každý úder vydieruje. Nuž, horšiu ako červenú dierovačku nemáme, takže každý úder isto spraví aspoň C riadkov. Túto skutočnosť vidno aj v predchádzajúcich rovniciach: v oboch kolách sa objavili členy $P{\cdot}C$ a $R{\cdot}C$. Taktiež to vidno na obrázku ako sivé časti (1) a (2).

No a keď teraz jednému z počítačov dáme lepšiu, modrú dierovačku, všetky jeho údery sa „vylepšia“ z hodnoty C na hodnotu M. Čím viac úderov sa takto vylepší, tým viac vydierovaných riadkov pribudne. A to už je vlastne riešením úlohy. Viac riadkov bolo vydierovaných vtedy, keď mal lepšiu dierovačku lepší počítač, čiže RASPBERRY v 2. kole. Mimochodom aj toto sa nám ukázalo v rovniciach a tiež na obrázku: prírastok $R{\cdot}x$ bol väčší ako prírastok $P{\cdot}x$, a na obrázku je časť (4) väčšia ako časť (3).

Jednoducho povedané: keď je počítač pomalý, až tak mu nepomôže ani dobrá dierovačka, nedokáže ju poriadne využiť. Rýchlejší počítač je viac citlivý na kvalitu dierovačky: horšia ho viac brzdí, zato lepšiu dokáže poriadne využiť.

Úloha S2: Úloha S2. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Pozrime sa, ako môžu vyzerať dvojciferné prvočísla, vytvorené z cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Ako prvé nám padnú do oka párne cifry. Žiadne dvojciferné prvočíslo nemôže končiť párnou cifrou, lebo by bolo deliteľné 2. Taktiež nemôže končiť cifrou 5, lebo by bolo deliteľné 5. Tým pádom je jasné, že naše prvočísla musia začínať ciframi 2, 4, 5, 6 a končiť ciframi 1, 3, 7, 9. Po chvíli skúšania nájdeme prvé riešenie: 23, 41, 59, 67. Súčet týchto čísel je 190.

Teraz by sme mohli pohľadať všetky ostatné možnosti a porobiť súčty. Je tu však aj iná, jednoduchšia možnosť. Stačí sa ešte raz zamyslieť nad tým, čo už sme zistili: Cifry už máme definitívne rozdelené na začiatočné a koncové. Takže keď z nich poskladáme (akékoľvek) dvojciferné prvočísla, vždy budú na miestach desiatok cifry 2, 4, 5, 6 a na miestach jednotiek cifry 1, 3, 7, 9. Pre ich súčet to teda znamená, že bude vždy v podobe 20+40+50+60 + 1+3+7+9 = 190. Jednoducho preto, lebo každé dvojciferné číslo xy vieme napísať ako súčet $(10x + y)$ a pri sčítaní viacerých takýchto čísel môžeme jednotlivé sčítance prehadzovať.

Riešenie už máme, je to 190.

Bodovanie:
výsledný súčet – 1b.;
ukázanie aspoň jednej štvorice prvočísel – 1b.;
postup a objasnenie, prečo bude súčet vždy 190 – 3b.
Plný počet bodov sa dal získať aj vypísaním všetkých možností, ako vytvoriť 4 prvočísla. Avšak len vtedy, ak ste riadne popísali postup vypisovania možností a bolo jasné, že žiadnych iných možností niet.

Poznámka:
Nebolo potrebné určovať všetky možnosti, ako vyrobiť prvočísla. Ale bolo nutné ukázať aspoň jednu takú možnosť, aby sme dokázali, že nejaká existuje. Keby totiž žiadna neexistovala, neexistoval by ani hľadaný súčet.

Úloha S3: Súčiastky. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Táto úloha bola jednou z tých ťažších. Jednoducho preto, lebo je pri nej veľmi dôležité pozerať sa na správne miesta, ktoré nemusia byť na prvý pohľad zjavné. Avšak nájsť ten správny pohľad je v matematike niekedy naozaj na nezaplatenie, a preto treba mať trochu trpezlivosti a skúšať k problémom pristupovať „zo všetkých strán“.

V prvej časti úlohy hľadáme kvalitu zapojenia pre štvorec 3×3. Keďže všetky súčiastky majú rôzne čísla, kvalita akéhokoľvek zapojenia bude určite minimálne 1. V prípade zapojenia 3×3 to ale viac ako 1 už byť ani nemôže. Prečo? Pozrime sa na stredné políčko. Číslo v ňom susedí so všetkými ostatnými číslami (či už stranou alebo rohom), a preto určite bude mať aj suseda od seba o 1 väčšieho či menšieho. Takže čísla môžeme usporiadať akokoľvek, **kvalita zapojenia 3×3 bude vždy 1.** (Príklad je na Obr. 1)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obr. 1

So zapojením 4×4 sa treba pohrať o niečo viac. Po pár pokusoch sa nám ale pošťastí a **nájdeme zapojenie 4×4 s kvalitou 3**, napríklad ako na Obr. 2. Sami si overte, že rozdiel každých dvoch susediacich čísel je aspoň 3.

13	5	15	7
9	1	11	3
14	6	16	8
10	2	12	4

Obr. 2

Teraz ostáva ešte dokázať, že zapojenie s kvalitou 4 nie je možné. A opäť sa bude treba pozerať na správne miesta. Najprv si rozdelíme štvorec na 4 rohové štvorce 2×2 ako na Obr. 3. V takýchto malých 2×2-štvorcoch každé políčko susedí s každým – to je pri vyhodnocovaní kvality zapojenia veľmi dôležité.

Teraz zoberme číslo 4. Akonáhle ho dáme do niektorého štvorca 2×2, hneď je jasné, že v tom štvorci už nemôžu byť čísla 1, 2, 3 ani 5, 6, 7, pretože kvalita zapojenia by nebola 4. Ďalšie prípustné číslo je až 8. To nám ale rovnakým spôsobom vyradí z hry čísla 9, 10, 11. Ďalej môže byť 12, ale nemôžu byť 13, 14, 15, no a na koniec ostáva už iba 16. Takže sme zistili, že **štvorica 4-8-12-16 musí byť pokope** v nejakom štvorci 2×2.

A	A	C	C
A	A	C	C
B	B	D	D
B	B	D	D

Obr. 3

Keď tú istú úvahu začneme od 13-ky smerom dole, zistíme, že pri 13-ke nemôžu byť 16, 15, 14 ani 12, 11, 10. Ďalej môže byť 9, nemôže byť 8, 7, 6, môže byť 5, nemôže byť 4, 3, 2 a nakoniec musí byť 1. Takže aj **štvorica 1-5-9-13 musí byť pokope** v nejakom štvorci 2×2.

Obdobne vieme zistiť, že v treťom rohovom štvorci **musí byť pokope štvorica 2-6-10-14** a že vo štvrtom **musí byť pokope štvorica 3-7-11-15**.

Ostal však ešte jeden nepreskúmaný štvorec 2×2 – ten v strede (Obr. 4). Aké čísla môžu byť tam? Čísla s rozdielom 3 nie, tie by nám pokazili kvalitu zapojenia. Čísla s rozdielom 4 tiež nie, lebo tie sú zoskupené v rohových štvorcoch. Musia to teda byť čísla s rozdielom 5 alebo viac. Túto podmienku spĺňa jedine **štvorica 1-6-11-16**, a preto **musí byť v strede**.

	S	S	
	S	S	

Obr. 4

Teraz nám stačí preskúmať len tri možnosti, ako môže byť táto stredová štvorica usporiadaná (ostatné sú len ich otočením alebo preklopením): buď sú v rohoch oproti sebe 1-16 (Obr. 5), alebo 1-11 (Obr. 6), alebo 1-6 (Obr. 7). Tie postupne skúsime vyplniť podľa toho, čo už vieme: každé dve políčka musia mať rozdiel aspoň 4 a rohové štvorce 2×2 musia obsahovať tie štvorice, ktoré sme si určili. Je to skoro ako sudoku. Otáznik značí políčko, do ktorého už nie je čo doplniť.

	13	**?**	
	1	6	
	11	16	

Obr. 5

Na Obr. 5 aj Obr. 6 je postup ten istý: k jednotke do rohu patria 1-5-9-13, z toho však so 6-kou môže susediť iba 13. Zapíšeme ju tam. K šestke patria 2-6-10-14, avšak 2-ka nemôže byť pri jednotke a 10 ani 14 nemôžu byť pri 13-ke. Na miesto otáznika nie je čo doplniť, takže tieto štvorce nemôžu mať kvalitu 4.

	13	**?**	
	1	6	
	16	11	

Obr. 6

Na Obr. 7 podobnými úvahami doplníme najprv 5-ku, potom 15-ku a opäť narazíme na problém na mieste otáznika. Vyskúšaj si to!

Všetky možnosti skončili v slepej uličke. To znamená, že zapojenie 4×4 s kvalitou 4 sa zostrojiť nedá, a teda sa nám potvrdilo, že **zapojenie 4×4 s kvalitou 3 je najlepšie možné**.

	5	15	
	1	11	**?**
	16	6	

Obr. 7

Bodovanie:

správna odpoveď a odôvodnenie pre 3×3 – 1,5b.;
správna odpoveď pre 4×4 – 1b.;
odôvodnenie, že 4×4 má kvalitu maximálne 3 – 2,5b.

Úloha S4: Výroba počítačov. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Informácie zo zadania vidíme zhrnuté v tabuľke. Ďalej vieme, že do továrne každý mesiac doviezli 480 KVAKov a 180 GOVov. Našou úlohou je zistiť, koľko ktorých počítačov treba vyrobiť, aby bol zisk čo najväčší (zo zadania tiež vieme, že každý mesiac sa predali úplne všetky vyrobené počítače).

Ešte než sa pustíme do riešenia, zdôrazňujem, že nikde v zadaní **nebolo** napísané, že treba využiť všetky súčiastky.

	Potrebné súčiastky	Zisk
Počítač na pekné počasie:	4 KVAKy, 1 GOV	200€
Počítač na dážď:	2 KVAKy, 1 GOV	350€

Všimnime si, že oba počítače potrebujú 1 GOV. Keďže GOVov je k dispozícii iba 180, tak nech by pán Rosnička výrobu rozdelil akokoľvek, **nedá sa vyrobiť viac ako 180 počítačov**. Keď už sme určili takúto hornú hranicu, tak samozrejme prvý nápad je: skúsme vyrobiť 180 tých drahších počítačov – počítačov na dážď. Ešte však musíme overiť, či na také niečo vystačia aj KVAKy. Na jeden počítač na dážď treba 2 KVAKy, takže na 180 počítačov bude potrebných $180 \cdot 2 = 360$ KVAKov. Továreň ich má 480, takže viac než dosť. Hurá, podarilo sa vyrobiť maximálny počet počítačov, a všetky s najväčším možným ziskom. Keby si pán Rosnička bol nechal od nás poradiť, mohol byť bohatý! **Zisk bude maximálny pri výrobe 180 počítačov na dážď.**

Bodovanie:
správny výsledok aj postup – 5b.;
numerické chyby – mínus 1b.;
predpoklad, že treba použiť všetky súčiastky – mínus 1b.

Poznámka:
Iste ste si mnohí všimli, že táto úloha bola o čosi jednoduchšia, ako je v PIKOMATe zvykom. Áno, toto vskutku nebol náš plán. Pri príprave zadaní sme totiž omylom medzi sebou vymenili čísla udávajúce zisky. Treba však dodať, že zadanie napriek tomu nebolo vyslovene chybné a ako vidno, úloha aj takto má jednoznačné riešenie. Dokonca z toho plynie určité ponaučenie: zadanie treba čítať poriadne, presne tak, ako je napísané, a nedomýšľať si informácie, ktoré v ňom nie sú – ako napríklad, že treba použiť všetky súčiastky.

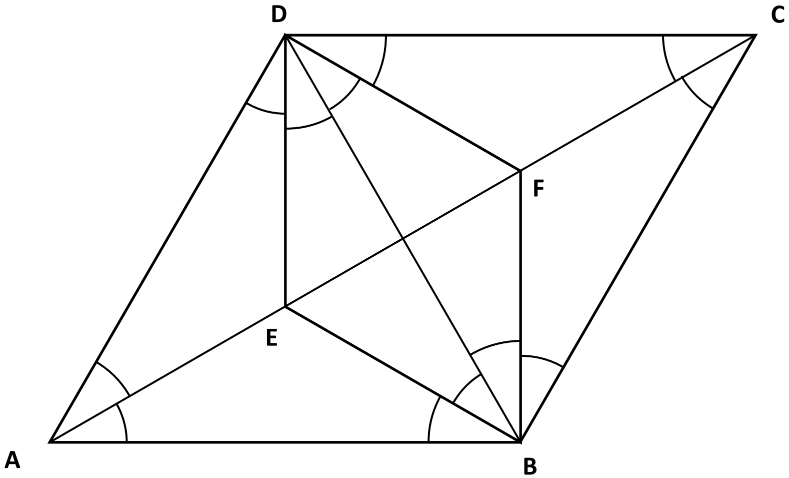
Úloha S5: Anténa. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Najjednoduchším spôsobom, ako začať riešiť túto úlohu, je zaznačiť si do obrázku všetko, čo vieme o anténe ľahko zistiť. Zadanie nám prezrádza veľkosti uhlov $|\angle DAB| = 60°$ a $|\angle DFB| = 120°$. V kosoštvorci platí, že protiľahlé uhly sú rovnaké a súčet vnútorných uhlov je 360°. Z toho si ľahko dopočítame, že v oboch kosoštvorcoch majú všetky ostrejšie vnútorné uhly 60° a všetky zvyšné vnútorné uhly 120°.

Ďalej vieme, že strany kosoštvorca sú zhodné. Tým pádom keďže strany AB a AD zvierajú uhol 60°, vieme povedať, že trojuholník ABD je rovnostranný. Skrátka, že uhlopriečka BD je rovnako dlhá ako ostatné strany väčšieho kosoštvorca.

V kosoštvorci tiež platí, že uhlopriečka tvorí os uhla, takže ho delí na polovicu. Keď zakreslíme aj uhlopriečku AC, vidíme, že všetky uhly vyznačené na Obr. 1 pri vrcholoch A, B, C a D majú 30°. To znamená, že anténu vieme rozdeliť na **6 zhodných rovnoramenných trojuholníkov BED, BFD, AED, AEB, BFC a DFC**, ktoré majú dĺžku základne rovnú dĺžke strany kosoštvorca ABCD, uhly pri základni 30° a uhol pri vrchole 120°. Z týchto 6 trojuholníkov 2 tvoria kosoštvorec DEBF, čo je tretina celého kosoštvorca ABCD.

Obsah kosoštvorca ABCD je trikrát väčší ako obsah kosoštvorca BFDE.



Obr. 1

Bodovanie:
správna odpoveď s kompletným postupom – 5b.;
chýbajúce časti postupu – 3-4,5b.;
nesprávna odpoveď, ale sčasti správny postup – 2b.;
iba správna odpoveď – 1b.;

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09