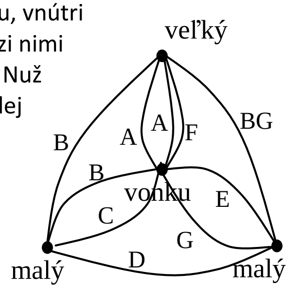
Príklad S5: Jednou čiarou. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Tento príklad ste pochopili dvoma rôznymi spôsobmi, oba som bral ako správne.
Časť z vás chcela preťať naozaj všetky úsečky. V tomto prípade je riešenie jednoduché – ak by sme preťali napríklad úsečku CE a aj úsečku EH, bola by úsečka CH preťatá dvakrát. Ak by sme CH chceli preťať len raz, nemohli by sme preťať obe menšie úsečky. Preto sa to nedá spraviť.
Nuž a druhá časť z vás chcela pretínať len tie „menšie úsečky“ (všetky okrem BG, CH, AC,FH), pričom mnohí ste napísali, že je to asi myslené takto, lebo to prvé pochopenie je moc ľahké ☺. Tak sa pozrime na to, ako to vyzerá v tomto prípade. Máme 7 úsečiek po obvode (AB, BC, CE, EH, HG, GF, FA) a tri vnútri (BD, DG, DE). Tieto tri si teraz nebudeme všímať. Ak začneme kresliť našu čiaru vonku, jednou z tých siedmych obvodových úsečiek vojdeme dnu, ďalšou von, dnu, von, dnu, von, dnu, a už nemáme žiadnu úsečku, ktorou by sme vyšli von, aby sme tam uzavreli našu čiaru. (A ak začneme vnútri, skončíme vonku). Nuž veru tak ani takto sa to nedá spraviť, keďže tých obvodových úsečiek je nepárny počet. (Pri párnom by sme išli rovnako veľakrát dnu aj von, takže by sa to mohlo dať. Netvrdím, že by sa dalo – podľa toho, ako by boli umiestnené vnútorné úsečky. Tie by tiež nesmeli tvoriť útvary s nepárnym počtom obvodových úsečiek, ako napríklad tu: ABDGF).
Bodovanie: Takto málo stačilo na zisk piatich bodov ☺. Niektorí z vás ukázali, že keby sme preťali dve úsečky naraz (prešli by sme bodom, v ktorom sa spájajú), tak by sa to dalo. To je ale opäť dôsledkom toho, že obvodových úsečiek je nepárny počet a takýmto ťahom by sme ho akoby zmenili na párny. Čiže aj tu som vyžadoval nejaké vysvetlenie týkajúce sa párnosti.

Nuž a pre fajnšmekrov matematicky elegantné riešenie na záver: Prevedieme si náš obrazec na niečo, čo sa v matematike nazýva *graf*. Miesta v obrazci (vonku, vnútri malých obdĺžničkov) budú znázornené *vrcholmi* a priechody medzi nimi (úsečky, ktorými sa dá prejsť z jednej oblasti do druhej) *hranami*. Nuž a teraz sa pokúsime nakresliť toto jedným ťahom – prejsť po každej čiare práve raz a skončiť tam, kde sme začali (tomuto sa hovorí *uzavretý eulerovský ťah* podľa pána Eulera, ktorý sa týmto zaoberal). A vidíme to isté, čo aj v pôvodnom príklade – z miest „vonku“ a „veľký“ vedie nepárny počet hrán, teda ak v jednom z nich začneme, v tom druhom skončíme a nemáme šancu uzavrieť našu cestu.



organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Trate a zastávky. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Očíslujme si zastávky od 1 po 12. Každú linku vieme popísať tromi číslami – zastávky danej linky. Napr. (1,4,6) je linka, ktorá navštívi zastávky 1,4 a 6. My hľadáme najväčší počet takých trojíc čísel, aby žiadne dve trojice nemali spoločnú dvojicu – vtedy by to znamenalo, že takéto dve linky majú 2 spoločné zastávky.

Úlohu si môžeme nakresliť: predstavme si linky ako trojuholníky, ktorých vrcholy sú zastávky. Každá linka pozostáva z 3 čiar, teda z 3 dvojíc zastávok. My požadujeme, aby sa žiadna takáto čiara nevyskytla viac ako 1-krát. Keď máme 12 zastávok, nie je ťažké určiť, že sa medzi nimi dá nakresliť najviac 66 rôznych čiar, 66 rôznych dvojíc zastávok. Z každej zastávky bude vychádzať 11 čiar.

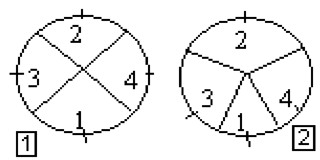
Aj tu je však jeden drobný problém, na ktorý treba dať pozor: keďže linky sú trojuholníky, pri jednej zastávke každá linka "spotrebuje" práve 2 čiary. Tým pádom keďže pri zastávke 11 (nepárny počet) čiar, ostane nám pri každej zastávke jeden koniec čiary nevyužitý. Týchto nevyužitých dvojíc bude dokopy 12 / 2 = 6 (12 zastávok, delené 2, pretože čiara má 2 konce).

Ostáva nám teda 60 reálne využiteľných čiar. Linka pozostáva z troch čiar, čiže teoretické maximum počtu liniek je 20. Toto je vhodné aj prakticky overiť a dané linky nájsť, či vôbec existujú. Niektorí z vás ich aj naozaj našli (dá sa to), čím potvrdili, že správna odpoveď je **20**.
Bodovanie: správne teoretické odvodenie výsledku – 5 bodov; aj nájdenie 20 liniek – extra pochvala, ale nevyžadovalo sa to; dobre začatý postup, ale menší počet liniek: 4-5 bodov; slabý postup, no rozumný spôsob hľadania liniek – 2,5-3,8b.; chybne nájdené linky – 1,5-2,5b.; za snahu – 0,1-0,5b.;

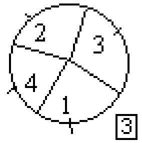
Príklad S2: Business. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

V mysliach vedenia firmy č.2 prebieha asi takáto úvaha: „Ktorý dom si máme vybrať? Nesmieme zabúdať, že po nás si budú vyberať ešte dve firmy a každá sa bude snažiť ‚ukrojiť' si čo najviac z koláča“ (ó, aká krásna metafora na naše Kruhové mesto).

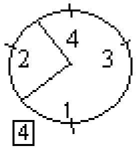
Ako prvé ich (a aj väčšinu z vás) napadlo umiestniť svoju firmu oproti firme č.1. Pri tomto počte domov „oproti“ znamená buď do domu č.649 alebo 650. Tým pádom vzniknú dve skoro rovnaké „medzery“. Firma č.3 si potom vyberie dom v strede väčšej z nich a firma č.4 v strede menšej z nich (obr.1). Tu by sa patrilo podotknúť, že to nemusí byť presne v strede, ale hocikde v tej medzere. Počet zákazníkov dotyčnej firmy sa nezmení (¼ mesta), zmení sa len počet zákazníkov firiem 1 a 2 (obr.2). Keďže to môže byť hocikde v tej medzere, nech je to priemerne presne v strede

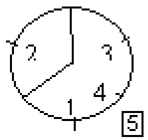


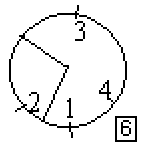
(obrázky sú len ilustračné ☺). Body na kružniciach označujú firmy, kruhové výseky znázorňujú časti mesta prislúchajúce firmám. Nuž a takto bude mať firma 2 tiež štvrtinu všetkých zákazníkov (v najlepšom prípade polovicu, v najhoršom žiadnych, ale priemerne ¼).



Nemôže to byť však aj lepšie? Predstavme si, že začneme náš obchod č.2 posúvať po kružnici. Firma 3 bude stále vo väčšej medzere a firma 4 v menšej (obr.3). Keď sa ale pozrieme na náš obrázok, stále nám ostane ¼ mesta (v *priemernom* prípade sú firmy 3 a 4 na priemere, my medzi nimi). Až raz... Pozrime sa, čo sa stane, keď dáme našu firmu do domu č.434. Menšia medzera bude mať 432 domov, väčšia 863. Keď sa do väčšej postaví firma č.3, ostanú tam (v priemere) dve medzery po 431 domov a firma č.4 sa postaví oproti nej – do ešte stále väčšej, 432-domovej medzery. A teraz prichádza najdôležitejší moment – prekročíme jednu tretinu – postavíme firmu č.2 do domu č.433. Menšia medzera bude mať 431 domov, väčšia 864. Kto dobre ráta, už tuší, že aj keď sa firma č.3 postaví do väčšej medzery a rozdelí ju na dve menšie, aj tak jedna z tých menších bude vždy väčšia ako medzera medzi firmami 1 a 2. Takže firma č.4 sa postaví do tej medzery. Ak je to tá medzera medzi firmami 2 a 3 (obr.4), tak našej firme č.2 ostane opäť ¼, no ak bude väčšia medzera medzi 1 a 3 (obr.5), tak firme č.2 ostane až ⅓ všetkých zákazníkov. Takže *v priemere* bude mať firma č.2 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)/2=\frac{7}{24}$ všetkých zákazníkov. Keď však budeme posúvať firmu č.2 ešte ďalej, bude sa jej podiel zmenšovať (obr.6). Preto je pre firmu č.2 najlepšou možnosťou zvoliť si dom č.433, prípadne 866 na druhej strane, pre ktorý platí symetricky to isté.







<u>Bodovanie</u>: Pre mnohých z vás sa ukázalo ako veľký problém určiť číslo toho správneho domu aj vtedy, keď ste vedeli, že to má byť tesne pred tretinou. Spravili ste niečo ako 1297÷3=432,33.. a keďže to má byť <u>pred</u> tretinou, tak to zaokrúhlime nadol. Lenže číslo 432 nie je číslo toho správneho domu, ale jeho <u>vzdialenosť</u> od domu 1. Preto je to dom 433 alebo 866 (na dom 866 tiež mnohí zabudli). Za to prvé sa dal stratiť až bod, za to druhé polbod. Zvyšok závisel od opisu postupu.

Príklad S3: V kurze. *Opravovala Jana Štolcová.*

Na začiatok si ujasnime zadanie. Je 5 fyzičiek: Alica, Betty, Carol, Dona a Eve; a 4 druhy mincí: penny, nickel, dime a quarter. Cent je iba prevodová jednotka, nie typ mince! Každá fyzička má mať z každého druhu aspoň jednu mincu. To znamená, že štyri už vlastne poznáme: 1 penny + 1 nickel + 1 dime + 1 quarter = 1 + 5 + 10 + 25 = 41c. Každá má práve 6 mincí, teda nám zostáva určiť ešte dve mince pre každú fyzičku.

Betty má o 1 nickel viac ako Alica. To znamená, že Betty musí mať z tých dvoch mincí určite ešte aspoň 1 nickel. Ale Dona má o 1 nickel viac ako Betty, čiže musí mať aspoň dva nickle. Teda Dona musí mať okrem povinného základu (z každého druhu 1 kus) práve dva nickle, Betty jeden nickel. Tým sme úplne objasnili, aké mince *musí mať Dona: 1 penny, 3 nickle, 1 dime a 1 quarter*. To je spolu 1 + 3*5 + 10 + 25 = 51 centov.

Betty má mať o 5 centov viac ako Dona, teda musí mať 56 centov. Vieme už, že má navyše 1 nickel, čiže otáznou ostáva iba jediná minca. Tá musí byť v hodnote 56 – 41 – 5 = 10 centov a to je 1 dime. Takže *Betty musí mať 1 penny, 2 nickle, 2 dime a 1 quarter*.

Carol má o 1 penny viac ako Dona, teda medzi dvomi otáznymi mincami musí byť 1 penny. Tiež vieme, že má o 1 cent viac ako Dona, teda v súčte 52 centov. Potom posledná minca musí byť v hodnote 52 – 41 – 1 = 10 centov, čo je 1 dime. *Carol musí mať 2 penny, 1 nickel, 2 dime a 1 quarter.*

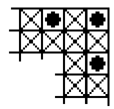
Eve má síce o 1 nickel viac, no v súčte o 5 centov menej ako Carol. Eve musí mať teda ešte 1 nickel a spolu mince v hodnote 52 – 5 = 47 centov. Jej posledná minca musí potom mať hodnotu 47 – 41 – 5 = 1 cent a to je práve 1 penny. *Eve musí mať 2 penny, 2 nickle, 1 dime a 1 quarter*.

Už zostáva iba Alica. Tá má o 5 centov viac ako Betty, teda 56 + 5 = 61 centov. Na jej dve mince teda pripadá hodnota 61 – 41 = 20 centov. To vznikne iba ak má 2 dime. Vidíme, že úloha môže mať iba toto jediné riešenie, a to že fyzičky určite majú spolu 61+56+52+51+47=**267 centov.**
<u>Bodovanie:</u> správny výsledok – 3 body; zvyšok závisel od odôvodnenia.

Príklad S4: Na sieti. *Opravoval Dano „Žofka" Lovásko.*

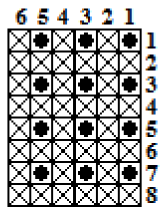
Pri hľadaní stratégie pre túto hru existuje pár základných dôležitých myšlienok. Prvou z nich je rozdelenie políčok na výherné (ktoré keď zaškrtneme, vyhráme) a prehrávajúce (ktoré keď zaškrtneme, prehráme). Pri oboch sa predpokladá, že obaja hráči zahrajú vždy ten najvýhodnejší ťah, že nikto nespraví „hlúpu chybu". Logicky, stratégia bude taká, aby sme počas celej hry stúpali iba na výherné políčka. Taktiež je dôležité, aby súper nedostal šancu stúpiť na jedno z nich – teda ***výherné políčko** je také, z ktorého sa dajú zaškrtnúť IBA prehrávajúce políčka.* Keď máme takto definované vyhrávajúce políčka, je zrejmé, že ***prehrávajúcim políčkom** je každé, z ktorého sa dá zaškrtnúť ASPOŇ JEDNO vyhrávajúce políčko* (predpokladáme totiž, že ak sa to dá, protihráč to aj urobí).

Druhou dobrou myšlienkou bolo nachádzať tieto políčka tak, že pôjdeme odzadu. Poďme si vypĺňovať obrázok: krúžkom budeme označovať výherné a krížikom prehrávajúce políčka. Prvé výherné políčko sa nachádza vpravo hore. Všetky políčka, z ktorých sa dá potiahnuť na toto výherné (naľavo, naľavo dole, dole), sa tým pádom stávajú prehrávajúcimi, pretože súper z nich automaticky potiahne na víťazné políčko. Ako rozostaviť ďalšie výherné body tak, aby spĺňali pravidlá ich rozmiestňovania? Zatiaľ vidíme len 2 miesta, z ktorých sa dá ísť ďalej iba na prehrávajúce políčko - bude to o dva nižšie alebo o dva doľava než prvé víťazné. Potom môžeme opäť výherné políčka obkolesiť prehrávajúcimi (obr.1).



obr.1

Keď budeme takto ďalej pokračovať, prídeme na to, že všetky víťazné body sú v sieti. Stratégiou bude teda vždy potiahnuť na víťazný bod. Keďže rozostavenie bodov nedovolí súperovi potiahnuť na víťazný bod, je nám jedno, ako hrá. Podľa tejto stratégie je hra rozhodnutá ešte pred jej začiatkom – závisí to len od rozmerov hracieho plánu a teda od toho, aké políčko (vyhrávajúce / prehrávajúce) „povinne" zaškrtne prvý hráč.



obr.2

Je ešte zaujímavé, že pozície víťazných bodov majú súradnice podľa rozmeru hracej plochy. Keď si políčka očíslujeme ako na obr. 2, vidíme, že všetky výherné body zároveň tvoria všetky políčka s oboma súradnicami nepárnymi. Všetky ostatné políčka (teda všetky s aspoň jednou súradnicou párnou) sú prehrávajúcimi. Pomocou tohto pravidla vieme odpovedať na otázky: Ako to dopadne pri 6x8? Pomocou tejto stratégie dokáže druhý hráč vždy vyhrať (6 aj 8 sú párne). 9x10 je to isté (10 je párne). MxN? Pokiaľ sú obe, M aj N, nepárne, vyhrá vždy prvý hráč, inak vždy druhý.

<u>Bodovanie:</u> odpoveď na 8x6 – 1 bod; stratégia – 2 body; odpoveď na 9x10 – 1 bod; odpoveď na MxN – 1 bod; 5 bodové riešenia som odmenil kvetinkou :)

OPRAVA

Vo vzorových riešeniach minulej (prvej) série letnej časti sa vyskytli matematicky nekorektné tvrdenia, za ktoré sa týmto ospravedlňujeme a uvádzame opravenú verziu vzorového riešenia príkladu S4 – Heslo.

Zadanie:

Nájdite heslo Baby-Jagy, ak viete, že heslo je najmenšie trojciferné číslo, ktoré je deliteľné bezo zvyšku práve polovicou z nasledujúcich čísel: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36.

Vzorové riešenie:

V zadaní sme mali 12 čísel (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36). Keď má byť hľadané číslo deliteľné práve polovicou z nich, bude deliteľné práve šiestimi z nich. Ak by nebolo deliteľné číslom 2, znamenalo by to, že by nebolo párne a nemohlo by byť deliteľné ani jedným z čísel 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 36 (a 2). Ako možné delitele by zostali 3, 9, 27, čo je príliš málo. Teda hľadané číslo *musí byť deliteľné 2*. Ak by hľadané číslo nebolo deliteľné 3, nebolo by deliteľné ani 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36 (a 3). Takže by opäť nezostalo dosť deliteľov. Preto *aj 3 musí byť deliteľom*. Takže číslo je deliteľné aj 2 aj 3 a tým pádom určite bude deliteľné 6. Ak by bolo deliteľné 36, bolo by zároveň deliteľné aj 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, čo je spolu 8 deliteľov – priveľa. Preto hľadané číslo *nebude deliteľné 36*. Ak by bolo číslo deliteľné 24, bolo by zároveň deliteľné aj 2, 3, 4, 6, 8, 12, čo je spolu 7 deliteľov – opäť priveľa. Preto hľadané číslo *nebude deliteľné 24*.

Zatiaľ vieme, že číslo bude deliteľné 2, 3, 6 a nebude deliteľné 24, 36. Povedzme, že dané číslo bude deliteľné 16-tkou – tá má rozklad na prvočísla 2*2*2*2. Okrem toho vieme, že číslo bude deliteľné aj 3. Hľadané číslo by v tom prípade bolo deliteľné aj 24 (2*2*2*3), čo sme ako možnosť vylúčili. Teda *nebude deliteľné ani 16*. Do úvahy ešte pripadajú čísla 4, 8, 9, 12, 18, 27. Viem, že dané číslo bude určite mať v rozklade na prvočísla ďalšiu 2 alebo 3, inak by sme zo zadaných čísel nikdy nedosiahli 6 deliteľov. Zatiaľ máme isté iba 2*3, takže skúsime pridať ďalšiu 2. Dostali sme 2*2*3, čo má iba 5 deliteľov z daných čísel (2, 3, 4, 6, 12). To je ešte stále málo, takže opäť pridáme 2 a tak dostávame 2*2*2*3, čo je deliteľné aj 24, takže táto možnosť nie je správna. Vrátime sa o krok späť. Máme 2*2*3 a pridáme 3. Dostaneme 2*2*3*3, čo je deliteľné 36, takže ani toto nie je správna možnosť. Vrátime opäť na začiatok. Máme 2,3 a tentoraz skúsim pridať 3. 2*3*3 má opäť len 5 deliteľov (2, 3, 6, 9, 12). To ešte nie je dosť, preto skúsime pridať 2. 2*2*3*3 je možnosť, ktorú sme už skúšali a zistili sme, že nie je správna (deliteľné 36). Takže namiesto dvojky pridáme trojku. Dostali sme 2*3*3*3, čo je deliteľné 2, 3, 6, 9, 18, 27, teda presne polovicou zadaných čísel.

Ostalo nám presne šesť čísel, ktoré musia byť deliteľmi hľadaného čísla: 2, 3, 6, 9, 18, 27. Ich najmenší spoločný násobok je 54. Lenže 54 je dvojciferné číslo a my hľadáme trojciferné. Vieme však, že hľadané číslo bude násobok 54. Keby sme 54 vynásobili 2, dostaneme síce trojciferné číslo, ale toto číslo bude deliteľné 4 a túto možnosť sme už vyššie vylúčili. Keď vynásobíme 54*3, dostaneme číslo 162, čo nám nepridá ani jedeného deliteľa spomedzi zadaných čísel. Teda *číslo **162** je najmenšie trojciferné číslo, ktoré je deliteľné práve polovicou zo zadaných čísel*.

Vyskytlo sa aj iné, žiaľ nesprávne pochopenie príkladu. Niektorí z vás riešili príklad tak, že hľadali najmenší spoločný násobok *polovíc* čísel zo zadania, teda čísel 1; 1.5; 2; 3; 4; 4.5; 6; 8; 9; 12; 13.5; 18. <u>Lenže deliteľnosť je vlastnosť celých čísel</u> a preto nemôže byť správne riešenie hľadanie najmenšieho spoločného násobku týchto čísel. Preto ste za toto riešenie nedostali viac ako 3 body v závislosti od riešenia a výsledku (108 alebo 216).

Bodovanie: správny postup aj riešenie – 5b.; nesprávne pochopenie príkladu so správnym riešenie – maximálne 2,5 až 3 body.