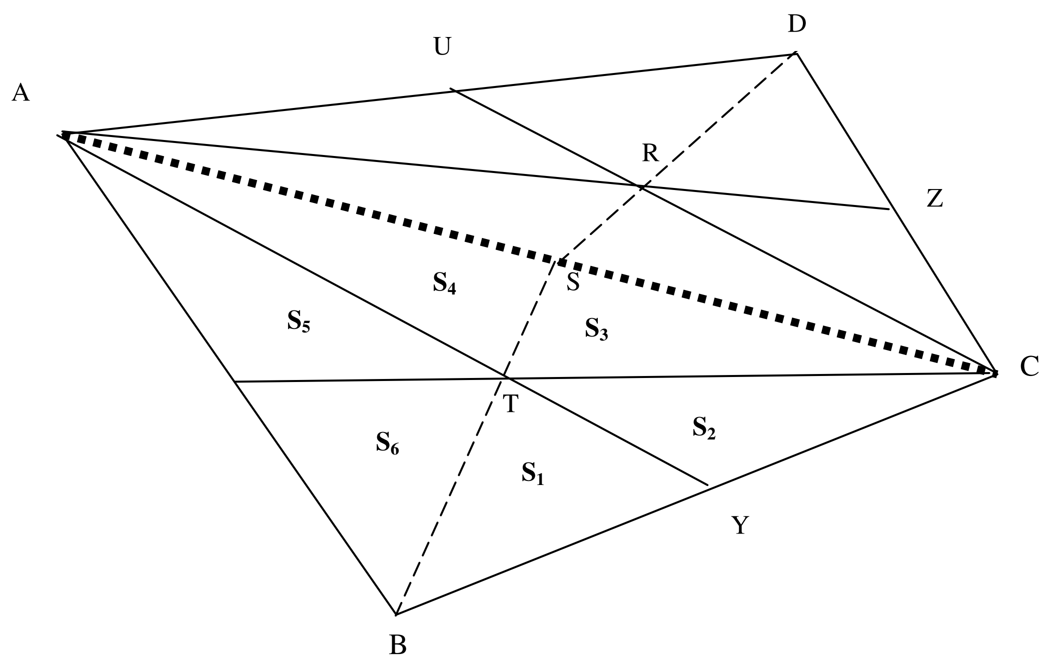
tak môžem každú cifru z každého miesta vybrať už iba 9 spôsobmi (0,2-9). Teda počet kódov, ktoré neobsahujú 1 je $9^7$ =4 782 969, a to je zrejme menej ako polovica, teda zvyšných - tých čo 1 obsahujú je viac. Pravdu mal Vladko.

Riešiť sa táto úloha dala aj inak. Drvivá väčšina z vás postupne počítala počet čísel, kde sa jednotka nachádza. Tu ste si mohli najskôr spočítať, že od 0-99 je takých čísel 19. Preto v 0-999 je týchto čísel 100 (pre čísla 100-199) + 19*9 (všetky ostatné stovky začínajúce „0“,2-9) = 271. Rovnakou úvahou dostávame, že týchto čísel je od 0-9 999 je to 1000+9*271=3 439. Pre 0-99 999 je ich potom 40 951 (10 000 + 9*3439), 468 559 (100 000 + 9*40 951) pre 0 -999 999, až napokon 5 217 031 (1 000 000 + 9*468 559) pre všetky zadané, a teda je ich viac ako tie čo 1 neobsahujú.

**Bodovanie:** Za samotné zistenie, že tých čo 1 obsahujú je viac, bol 1 bod. Za „intuitívne“ tvrdenie bez akéhokoľvek dôkazu, že to bol Radko ste mohli získať najviac pár desatiniek. Ďalej ste mohli stratiť ak ste sa odhodlali úlohu všelijako krkolomne spočítavať a spravili ste v mnohých numerických operáciách nejaké zbytočné chyby. Tu som požadoval, aby ste to, keď ste sa na to už odhodlali, spočítali presne!- Pretože ak ste spravili aj iba malú chybu, mohlo to váš výsledok úplne zmeniť, čo sa nakoniec aj v niektorých prípadoch potvrdilo, a záležalo iba či ste tú chybu spravili na začiatku alebo na konci. Za malé nepresnosti som strhával 0,1b, za väčšie podľa závažnosti aj pár bodov.




Obrázok k príkladu číslo S3



**Vzorové riešenia 1. série letnej časti kategórie 7-9**

organizátor korešpondenčného seminára

podporuje odborný rast organizátorov seminára

**Príklad S1: Páčky, páčky, páčky…** *opravoval Peter Drát(ik) Drábik*

(vzorové riešenie podľa Marty Draveckej)

Najprv si vypočítame, akou časťou všetkých páčok (**x**) sa dá pohnúť len doľava, len doprava, obidvoma smermi, a koľkými sa nedá pohnúť vôbec. Vieme, že **x / 2** páčkami sa dá pohnúť doľava a **x / 3** páčkami sa dá pohnúť doprava a 2 / 5 z tých, ktorými sa dá pohnúť doprava (**x / 3**), sa dá pohnúť aj doľava.

Z toho vyplýva, že:

- **obidvoma smermi** sa dá pohnúť (x / 3) * (2 / 5) = **2x / 15** páčkami,
- **len doprava** sa dá pohnúť (x / 3) - (2x / 15) = 3x / 15 = **x / 5** páčkami,
- **len doľava** sa dá pohnúť (x / 2) – (2x / 15) = **11x / 30** páčkami a
- **nedá** sa pohnúť x – [(2x / 15) + (x / 5) + (11x / 30)] = x – (21x / 30) = 9x / 30 = **3x / 10** páčkami.

Zo zadania vyplýva, že páčok, ktorými sa dá pohnúť len doľava, je o dve viac ako tých, ktorými sa pohnúť nedá. Čiže: (11x / 30) – (3x / 10) = 2

2x / 30 = 2

x / 15 = 2

**x = 30**

Skúška správnosti:

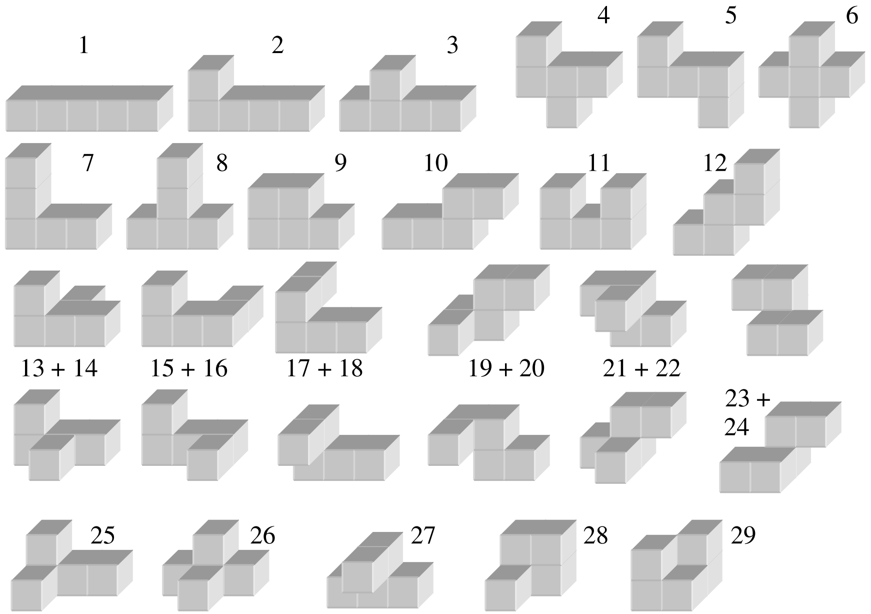
- obidvoma smermi: 30 * (2 / 15) = 4
- len doprava: 30 * (1 / 5) = 6
- len doľava: 30 * (11/ 30) = 11
- nedá sa pohnúť: 30 * (3 / 10) = 9

V súčte 4+6+11+9 dáva 30, teda platí, že **na riadiacej páke bolo 30 páčok.**

**Bodovanie:** odpoveď za 1 bod, postup pomocou rovníc 4 body, tipnutie a overenie za 2 body, zistenie výsledku bez vylúčenia ďalších možností za 2 body, zistenie výsledku a vylúčenie ďalších možností za 4 body.

**Príklad S2: Kocky, kocky, kocky …***opravovala Dáša Horáková*

V príklade bolo vlastne treba nájsť všetky možné navzájom rôzne telesá, ktoré sa dajú zlepiť z 5 kociek (kocky môžeme lepiť len celou stenou k celej stene) - vlastne stačilo zistiť ich počet. To sa však bez ich nájdenia ani veľmi nedalo. Pri takýchto príkladoch je dobré nájsť nejaký systém. Je to dobré kvôli nepomýleniu sa a sprehľadneniu hľadania, kvôli neprehliadnutiu nejakých možností, a teda, ak máme ukázať, že takých telies viac neexistuje, ťažko sa to dá bez toho, aby sme sa odvolali na nejaký systém, ktorý sme pri hľadaní použili. Systémy mohli byť rôzne, dôležité na nich bolo, že zabezpečili odskúšanie všetkých možností. Najprv uvediem všetky telesá a potom príklad systému. Telesá sa dali rozdeliť do viacerých skupín: na jednoposchodové – to sú tie, ktoré sa dajú postaviť tak, aby mali výšku jednej kocky (je ich 12), viacposchodové – všetky ostatné (je ich 17). Viacposchodové ešte rozdelím na dvojičky – jedno teleso vyzerá ako zrkadlový obraz druhého, ale nedá sa natočiť tak, aby bolo rovnaké s druhým (je 6 párov dvojičiek) a symetrické telesá – teleso aj jeho zrkadlový obraz sú rovnaké (je ich 5). Spolu je takýchto päťkockových telies 29.




Aspoň na ukážku uvediem dva systémy, ktoré ste pri vašich riešeniach použili:

**Systém 1:** hľadám všetky možné telesá, ktoré majú v rade za sebou

A) 5 kociek – teleso 1
B) 4 kocky – telesá 2, 3
C) 3 kocky – telesá 4 – 11, 13 – 18, 25 – 27
D) 2 kocky – telesá 12, 19 – 24, 28, 29

**Systém 2:** nájdem všetky možné telesá zo 4 kociek (je ich 8), ďalej sa snažím ku každému z nich pridávať 1 kocku na všetky možné pozície, ak objavím novú možnosť, zakreslím ju.

***Bodovanie***: bolo náročné a veľmi rôznorodé, keďže aj vaše riešenia boli také. Za systém 0,5 bodu, za každú chýbajúcu možnosť, či možnosť navyše – cca 0,2 bodu dole, za nájdenie iba jednoposchodových telies maximálne 1,5 bodu.

**Príklad S3 IQ test** *opravoval Táňa Viszusová*

Nakreslíme si obrázok podľa zadania(nájdeš ho na konci vzorových riešení). Okrem toho si doň dorobíme aj úsečky BS a DS, pričom S je stredom AC. Okrem toho si dorobíme aj AC, ktoré nám vlastne útvar delí na dva trojuholníky – ABC a ADC. Budeme sa teraz zaoberať každým trojuholníkom zvlášť. **ΔABC:** CX a AT sú ťažnice, takže T bude zrejme ťažisko a BS (tretia ťažnica) ním bude prechádzať. Tieto tri priamky nám delia trojuholník ABC na šesť trojuholníkov (viď obrázok). Označme ich obsahy $S_1$ až $S_6$. Pozrime sa teraz na trojuholníky s obsahmi $S_1$ a $S_2$. Ich strany BY a YC sú rovnako dlhé a ležia na jednej priamke. Vrchol oproti týmto stranám je obom trojuholníkom spoločný. Teda majú aj rovnaké výšky na tieto základne. No a keďže obsah vypočítame ako strana krát na ňu spadajúca výška delené dvoma, tak musí platiť $S_1 = S_2$. Obdobne $S_3 = S_4$ a $S_5 = S_6$. Teraz podobná úvaha: $S_{\Delta ABS} = S_{\Delta BCS}$ z rovnakých príčin ako v predchádzajúcej časti. Takže môžeme napísať S1 + S2 + S3 = S4 + S5 + S6. Po využití $S_3 = S_4$ , $S_5 = S_6$ , $S_1 = S_2$ sa nám výraz zjednodušuje na S1 + S1 + S3 = S5 + S5 + S3, z čoho teda S1 = S5. Obdobne S2 = S3 a S4 = S5.

Tým teda vieme že $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$. A teraz to príde. Týmto sme ukázali, že $S_{\Delta ATC} : S_{\Delta ABC}$ je 1: 3. (lebo ATC obsahuje dva trojuholníčky a ABC všetkých šesť). Rovnakou metódou by sme zistili, že $S_{\Delta ARC} : S_{\Delta ACD}$ je tiež 1:3. No a keď uvážime, že ATCR je tvorený ΔATC a ΔARC a ABCD je tvorený ΔABC a Δ ACD, TAK MÁME ODPOVEĎ. Teda hľadaný pomer je 3:1. Konvexnosť toho štvoruholníka je dôležitá preto, aby sme naozaj rozpolením úsečkou AC získali dva trojuholníky.

Poznámka: Mnohí z vás príklad dokázali pre štvorec, a potom povedali, že keď to platí pre štvorec, platí to aj pre všetky konvexné štvoruholníky. To však nie je pravda. Štvorec má isté špeciálne vlastnosti, ktoré nemá každý konvexný štvoruholník. Je to, ako by ste povedali, že ružová zmrzlina je sladké a preto všetko ružové bude sladké. Ale čo napr. ružové auto??!!

**Bodovanie:** Úplne dobré riešenie 5 bodov, drobné chybičky -0,5 boda. Nezdôvodnenie zásadnej chyby -1,5 boda, dôkaz pre jeden typ pravidelných útvarov 2 – 3 body, dôkaz pre konkrétny útvar 1 - 1,5 boda, za dobrý obrázok 0,5 boda.

**Príklad S4: Kosíme, kosíme** *opravoval Martin Malic Handlovič*

Príklad sa dal vyriešiť niekoľkými spôsobmi, uvedieme si jeden z nich, ktorý sa vyskytoval najčastejšie. Označíme si **x** ako počet koscov, podľa zadania na veľkej lúke robilo pol dňa **x** koscov a pol dňa **x / 2** koscov, teda je jasné, že **x** koscov pokosilo 2/3 lúky a **x / 2** koscov pokosilo 1/3 lúky, prečo je to tak, si ľahko uvedomíte aj sami. Potom ale muselo **x / 2** koscov pokosiť 2/3 malej lúky, lebo pomer lúk je 1:2. Zvyšnú 1/3 malej lúky by pokosil jeden kosec za jeden deň, potom nutne musí byť **x / 2 = 4**, lebo mali 2-krát väčšie územie a 2-krát menej času, a teda **x = 8**. No a keď jeden kosec pokosí za jeden deň 1/3 malej lúky, tak celú lúku pokosí za 3 dni a veľkú za 6 dní, lebo je 2-krát väčšia. Celé to pokosí za **3 + 6 = 9 dní**.

| | |
|---|---|
| **x** koscov za **pol dňa**<br>+<br>**x / 2** koscov za **pol dňa** | **x / 2** koscov za **pol dňa**<br>+<br>**1** kosec za **1 deň** |

**Bodovanie:** Za výsledok bol 1 bod, za postup 2 body, za zdôvodnenia 2 body, ak ste zabudli odpovedať za druhú otázku, tak ste mali okolo 3 bodov, ak ste to len tipovali a neukázali ste, že iné riešenie ako 8 nie je, tak ste mali okolo 3,5 bodu.

**Príklad S5: Číselnú hádku** *opravoval Jožo Cibíček*

Aby nám nevznikli neskôršie problémy s tým, že 0 nemôže byť na začiatku čísla, napíšme si pred všetky menej ako 7-ciferné čísla vopred toľko núl, koľko je potrebných na vzniknutie práve 7-ciferného „kódu“(už sa nejedná o čísla). Teda napr. číslo 12 zapíšeme ako kód 0000012. Spolu týchto kódov je $10^7$(0-9 999 999) ,pretože každú cifru na každom zo siedmich miest môžem vybrať 10 spôsobmi (0-9). Ak tento kód nemá obsahovať jednotku,