Príklad S6: *opravoval Pavol PC Cvik*

Keďže majú Alenka a Oknamor dôjsť do Pikolandu naraz, tak museli rovnaký čas kráčať pešo a rovnaký čas museli letieť. Keby jeden z nich letel dlhšie ako ten druhý, tak by musel kráčať kratšie, aby bol celkový čas cesty rovnaký. To znamená, že by sa dlhšie pohyboval rýchlejším dopravným prostriedkom a teda by za rovnaký čas došiel ďalej. To ale nesmie. Označme si vzdialenosť, po ktorej Alenka zastavila koberec ako *d*. Potom vieme, že peši prešla *63-d* čdm. Takže aj Oknamor prešiel peši *63-d* čdm. Dráhu, ktorú prešiel koberec od Alenky k Oknamorovi môžeme zapísať ako *d – (63-d) = 2d – 63*. Potom môžeme povedať, že čas, ktorý išla Alenka na koberci + čas, ktorý sa koberec vracal späť = čas, ktorý šiel Oknamor peši. Využijeme rovnicu čas = dráha / rýchlosť a zapíšeme rovnicou:

$$\frac{d}{30}+\frac{2d-63}{30}=\frac{63-d}{4}$$

Rovnicu upravíme: $2d+4d-126=945-15d$

$$21d=1071$$

A nájdeme riešenie: $d=51$

Takže, aby Alenka došla do Pikolandu naraz s Oknamorom, musí zastaviť koberec po 51 čdm.

Komentár: Mnohí ste príklad riešili pomocou sústavy 2-5 rovníc. Ako vidíte, dalo sa aj jednoduchšie – stačila jedna rovnica.

Bodovanie: výsledok...1b, rovnica/rovnice... max 2b, vysvetlenie a komentár... max 2b **za nesprávne výsledky, prípadne iba odhady max 0,5b**

PIKOMAT ,**20. ročník** **šk. rok 2002/2003**

Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: *opravovala Lenka Vojteková*

Objavili sa dva typy riešení. Uvediem oba.

1. spôsob: Spočíva v tom, že si určíme hranice, kde sa môžu nachádzať naše riešenia. Riešenie nemôže byť štvor- a viacciferné číslo, pretože najväčší ciferný súčet, aký je možné dosiahnuť pri štvorciferných číslach je 36 (9+9+9+9 u čísla 9999). Ale 36.13=468 a to je len trojciferné číslo. Podobne to je aj u viacciferných čísel. Maximálny ciferný súčet sa pri 5-ciferných číslach zväčší o 9, kým dané čísla sa zväčšia desaťkrát oproti 4-ciferným (u n-ciferných čísel sa ciferný súčet zväčší o 9k a dané čísla sú 10^k-krát väčšie). U trojciferných čísel je maximálny ciferný súčet 27 (9+9+9 u čísla 999). 27.13=351, čo je trojciferné číslo a teda stačí preveriť všetky prirodzené násobky čísla 13 do 351. Vypíšeme spomenuté násobky čísla 13 a nájdeme medzi nimi riešenia. V zátvorke sú zapísané 3 čísla, prvé znázorňuje, ktorý násobok čísla 13 to je, druhé – daný násobok a tretie jeho ciferný súčet. Hľadané čísla sú tie, kde sa prvé a tretie číslo rovnajú. Teda **117, 156, 195**. (1,13,4), (2,26,8), (3,39,12), (4,52,7), (5,65,11), (6,78,15), (7,91,10), (8,104,5), (9,117,9), (10,130,4), (11,143,8), (12,156,12), (13,169,16), (14,182,11), (15,195,15), (16,208,10), (17,221,5), (18,234,9), (19,247,13), (20,260,8), (21,273,12), (22,286,16), (23,299,20), (24,312,6), (25,325,7), (26,338,14), (27,351,9).

2. spôsob: Pre 1-ciferné čísla musí platiť: 13a = a. Táto rovnica má riešenie len pre cifru a = 0, ale 0 nie je väčšia ako 0, čiže žiadne z 1-ciferných čísel to nejde. Pri 2-ciferných číslach by to vyzeralo takto: 13a + 13b = 10a + b. Po úprave: a + 4b = 0. Táto rovnosť je splnená len pre a, b = 0, alebo jedno z nich musí byť záporné, čo nemôže. Pre 3-ciferné čísla platí: 13a + 13b + 13c = 100a + 10b +c. Po upravení tejto rovnice, dostaneme: b + 4c = 29a. Teraz si musíme zvoliť za jednu z neznámych cifier (napr. b) čísla od 0 po 9 a zistiť, či existujú také a, c z čísel 0 až 9, že je rovnosť splnená. Pre b = 1, 5, 9 je c =7, 6, 5 a a je pre všetky 1. Tieto cifry tvoria naše hľadané čísla. Pre 4-ciferné čísla to bude vyzerať obdobne: 1000a + 100b +10c + d = 13a + 13b + 13c +13d. Po úprave ostane: 329a + 29b = c + 4d. Ak by sme za c aj d zvolili najväčšiu možnú cifru 9 a a by bolo 1, rovnosť už nemôže nikdy nastať. Pre 5- a viac-ciferné čísla to podobne nebude mať riešenie.

Bodovanie: 3b – 3 riešenia + postup, 2b – zdôvodnenie

Príklad S2: *opravovala Alenka Kovárová*

Kurín sa skladá z 3x3x3, to je 27 kociek, ale v jednej je kohút (kocka má číslo 14), takže v kuríne je 26 vajíčok. Mnohým z vás sa podarilo zistiť, že lasička môže veľmi jednoducho z týchto 26 ukradnúť 25. Ak si kocky očíslujeme tak, ako znázorňuje obrázok, dá sa 25 vajec ukradnúť napríklad tak, že lasička pôjde kockami v tomto poradí: 1, 2, 3, 12, 11, 10, 13, 22, 19, 20, 21, 24, 15, 6, 9, 18, 27, 26, 25, 16, 17, 8, 7, 4, 5. Všimnite si, že lasička neprechádza kocku v pásoch, ani po poschodiach ani po zvislých častiach, tak ako ste to zväčša robili vy a potom ste nedostatočne odôvodnili, že prečo lasička nemôže kradnúť všetkých 26 vajíčok. Ukážme si jedno správne a krátke odôvodnenie: Všimnime si, že každá párna kocka susedí iba s nepárnymi

spodná časť

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

stredná časť

10	**11**	**12**
13	**14**	**15**
16	**17**	**18**

horná časť

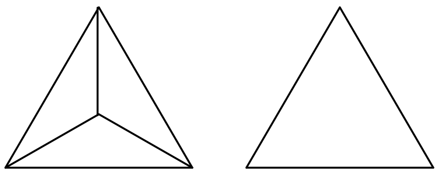
19	**20**	**21**
22	**23**	**24**
25	**26**	**27**

a naopak. Keď si to spočítame, tak lasička môže vykradnúť najviac 14 nepárnych a 12 párnych kociek (v 14-tke je kohút, tá sa nepočíta). Takisto si musíme všimnúť, že lasička pri kradnutí prechádza vždy z nepárnej kocky do párnej alebo z párnej do nepárnej. Z toho logicky vyplýva, že ak výsledkom jej kradnutia je ***p*** párnych kociek a ***n*** nepárnych, tak rozdiel medzi ***p*** a ***n*** je najviac 1, vyskúšajte si to. Ale medzi 14 a 12 je rozdiel 2, teda lasička nemôže ukradnúť všetky vajíčka, ale najviac 13 nepárnych a 12 párnych, čo je spolu 25 vajíčok.

Bodovanie: Ak ste ukázali, že lasička môže ukradnúť 25 vajíčok, dostali ste 2 body, ak ste aspoň skonštatovali, že viac nemôže, dostali ste 3 body. Ak ste odôvodnili, že 26 naozaj nejde, ale robili ste to po poschodiach alebo to nebolo úplne zdôvodnené dala som vám 4 body. Správne riešenie 5 bodov. Ak ste šetrili, resp. nešetrili slovami alebo obrázkami, mohli ste dostať navrch ešte 0,5 bodu, resp. o 0,5 bodu menej.

Príklad S3: *opravovala Majka Hanulová*

Jedno riešenie čajového problému je na obrázku. Nosy diabolských mužíkov sú vo vrcholoch štvorstena a rovnostranného trojuholníka a všetky hrany majú dĺžku 3 lakte. Vzájomná poloha trojuholníka štvorstena je ľubovoľná. Jedinou podmienkou je, aby žiadne dva diabolské nosy neboli k sebe bližšie ako 0,1 lakťa. Takéto alebo podobné priestorové riešenie našla väčšina z vás. Dvaja riešitelia našli aj riešenie v rovine, ktoré sem nenakreslím, aby ste ho mohli objaviť sami. Prísť naň je o kúsok ťažšie. Veľa z vás sa snažilo uložiť každý nasledujúci nos tak, aby bol od čo najviac už uložených nosov vzdialený 3 lakte. No v rovinnom riešení to tak nie je.



Bodovanie: Ak ste našli jedno zo správnych riešení 5b; ak ste našli nesprávne riešenie, ale mali ste správne uložených aspoň 5 nosov 2b; ak ste riešenie nenašli a snažili ste sa to dokázať, mohli ste získať 3 až 4b podľa kvality vašich argumentov

Príklad S4: *opravoval Martin Malic Handlovič*

Príklad sa dal vyriešiť niekoľkými metódami, my si ukážeme tú najpoužívanejšiu a asi aj najľahšiu. Asi by bolo príliš zdĺhavé deliť celé 101-ciferné číslo klasicky siedmimi, tak si ľahko všimneme, že číslo 888888 ako aj 999999 je deliteľné siedmimi bez zvyšku. Teda aj čísla 888888000..000, 999999000...000 pre hocikoľko núl sú deliteľné siedmimi(prečo, to si môžete overiť aj sami). Ak odpočítame od čísla deliteľného siedmimi číslo deliteľné siedmimi, tak aj výsledok bude číslo deliteľné siedmimi. Teda naše krásne 101-ciferné číslo sa zmení na 88Q99(ako, to viete zistiť aj vy). No a už nám teda ostáva len zistiť, pre ktoré Q je toto číslo deliteľné siedmimi. Riešenie je jedno a to **Q=5**.

Komentár: Veľká väčšina z Vás má 5 bodov, niektorí ste zabudli overiť VŠETKY možnosti, keď ste skúšali za Q dosadzovať číslice 0 až 9.

Bodovanie: Za správne riešenie bolo 5 bodov, za neoverenie všetkých Q bolo od 2,5 do 4 bodov, podľa kvality, za iné nedostatky v riešení boli ďalšie zrážky bodov. Celkovo bol za výsledok 1 bod, za postup 2 body a za zdôvodnenia boli tiež 2 body.

Príklad S5: *opravovala Táňa Viszusová* (vzorové riešenie podľa Peťa Bertu)

Prv, než sa pustíme do riešenia príkladu, musím vám prezradiť, že niektoré veci nechám na vás, aby toto vzorové riešenie nezabralo dva listy. Súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke má byť nejaké prvočíslo, ktoré je súčtom troch čísel. Teda musí byť väčšie ako dva a teda musí byť nepárne. Nepárne číslo môžem dostať ako súčet troch nepárnych alebo dvoch párnych a jedného nepárneho čísla. K dispozícii máme 5 nepárnych a 4 párne čísla. Jediné rozostavenie týchto čísel do tabuľky 3x3 také, aby súčty všade boli nepárne je nasledovné:

P	N	P
N	N	N
P	N	P

Vidíme, že je tu jeden riadok a jeden stĺpec, kde je súčet tvorený iba tromi nepárnymi číslami. Prvočísla v tabuľke musia byť medzi 6 (3+2+1) a 24 (9+8+7), takže sa jedná o prvočísla 7,11,13,17,19,23. Tieto vieme ako súčet troch nepárnych čísel zapísať iba nasledujúcim spôsobom:1+3+7, 1+3+9, 1+5+7, 1+7+9, 3+5+9, 3+7+9. Možnosti rozostavenia párnych čísel sú tri, podľa toho, či budú oproti sebe na uhlopriečke 2 a 4, 2 a 6 alebo 2 a 8. Ostávajúce dve čísla sú v druhej uhlopriečke oproti sebe. Všetky ostatné rozostavenia sú iba otočené alebo zrkadlové k týmto.

1. možnosť: oproti sebe 2 a 8.

8	A	4
B	C	D
6	E	2

Na mieste C môžu byť čísla 1,3,7,9. Na miestach B, E môžu byť iba čísla 3,5,9 a na miestach A, D iba čísla 1,5,7. Teraz si vezmime číslo 5. Spájajú sa s ním dve trojice- 1+5+7, 3+5+9. Nech by bolo kdekoľvek (a niekde byť musí), nemáme k nemu doplniť aké čísla z povoleného rozsahu toho riadku alebo stĺpca. Nad týmto sa dobre zamyslite, je to najdôležitejší bod príkladu. Teda takéto rozostavenie párnych čísel nemôže byť.

2. možnosť: oproti sebe sú 2 a 6.

8	A	6
B	C	D
2	E	4

V tejto možnosti je od začiatku jasné, že na mieste C musí byť číslo 5. Na miestach B a D môžu byť 1,3,7,9 ; na mieste A 3,5,9 a na mieste E 1,5,7. To znamená, že súčet v druhom stĺpci môže vyzerať iba nasledovne: 3+5+1,3+5+7,9+5+1,9+5+7. Ani jedno z týchto čísel však nie je prvočíslo.

3. možnosť: oproti sebe stoja 2 a 4.

Opäť v strede musí byť 5, táto možnosť je vlastne rovnaká ako tá pred ňou, len čísla A a E sú vymenené. Ani toto rozostavenie teda nie je riešením.

Týmto sme vyčerpali všetky možné rozostavenia párnych čísel a ukázali sme, že pri žiadnom z nich nedostaneme želaný výsledok. Teda neexistuje spôsob, ako nastrkať kľúče do zámky a Oknamor urobil dobre, že dvere vykopol

Bodovanie: Každý, kto zahájil aspoň nejaký pokus, získal nejaké bodíky. Ak ste prišli na rozloženie párnych a nepárnych čísel, mali ste istý jeden bod. Potom sa body už skôr strhávali za to, že ste neoverovali niektoré možnosti a tiež za nedotiahnuté riešenia, kde ste prosto povedali: A zvyšné možnosti sú rovnaké. Keď niekto napísal, že vyskúšal všetky možnosti, neuznala som mu to, pretože tých možností je viac ako 360 tisíc.