Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

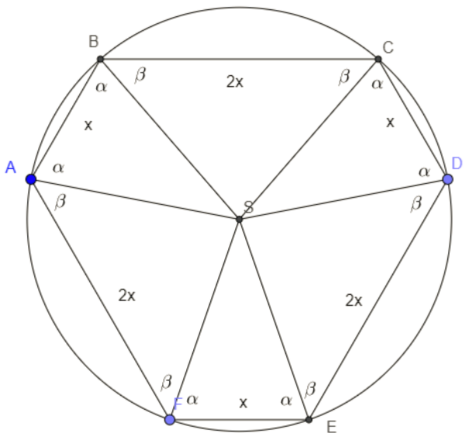
35. ročník www.pikomat.sk školský rok 2017/2018

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Muchachovia načúvajú – *Opravovali Tomáš Ganz, Erik Řehulka Adam „Santa“ Šánta*

Okolo ohňa bol udupaný kruh zeme. Keďže Muchachovia nepoužívali lavičky, po jeho obvode bolo zabodnutých 6 kolíkov a medzi každými dvoma susednými kolíkmi bolo napnuté hrubé lano, na ktoré si Muchachovia posadali. Laná boli nastriedačku modré (medzi 1. a 2. kolíkom), červené (medzi 2. a 3.), modré (medzi 3. a 4.), červené (medzi 4. a 5.), modré (medzi 5. a 6.) a červené (medzi 6. a 1.). Nakaru si počas rozprávania všimol zaujímavú vec o dĺžkach lán: všetky laná rovnakej farby boli rovnako dlhé a každé červené lano bolo dvakrát tak dlhé ako modré lano. Vzdialenosť od prvého po štvrtý kolík bola 9 metrov. **Koľko Muchachov si mohlo posadať na laná, ak každý potreboval na sedenie kus široký pol metra?**

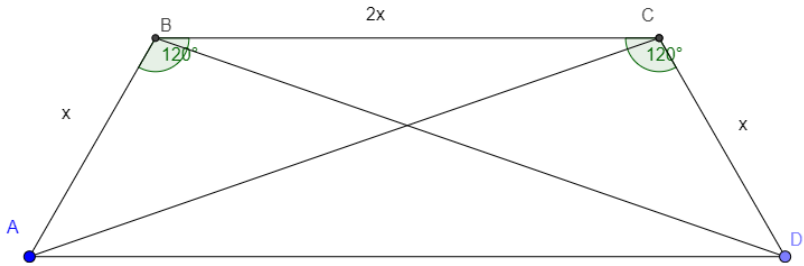
Na začiatok si nakreslime obrázok – do kružnice vpíšeme šesťuholník *ABCDEF*, pričom *A* je prvý kolík, *B* je druhý, *C* tretí... Dĺžku modrého lana si označíme x a keďže vieme, že červené lano je dvakrát dlhšie ako modré, tak jeho dĺžka bude $2 \cdot x$.



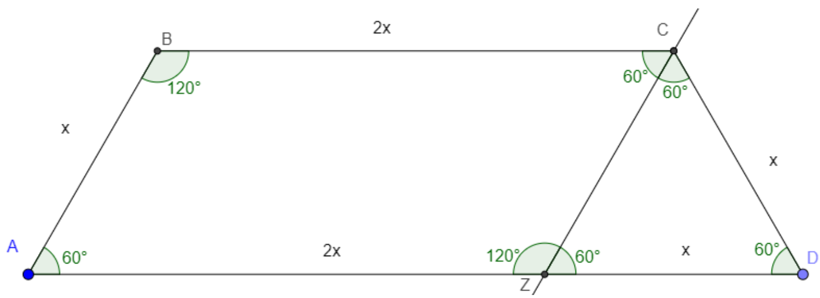
Bod *S* je stredom kruhu. Z každého bodu šesťuholníka si spravíme do bodu *S* úsečku, čím nám vzniknú rovnoramenné trojuholníky s ramenami dĺžky polomeru kružnice. Keďže majú všetky trojuholníky rovnako dlhé ramená (polomer je v kružnici vždy rovnaký) a niektoré z nich majú rovnako dlhé základne, budú niektoré zo vzniknutých trojuholníkov zhodné.

Prvé tri zhodné trojuholníky sú tie so základňou x, teda ASB, CSD, ESF. Druhé tri zhodné trojuholníky majú základňu $2 \cdot x$, teda BSC, DSE, FSA.

Keďže ide o rovnoramenné trojuholníky, tak budú uhly pri základni zhodné. Označme si v trojuholníku ASB uhly pri bodoch A a B ako α. Sú rovnaké. V trojuholníkoch CSD a ESF budú tiež uhly veľkosti α pri bodoch C, D, F a E. V rovnoramenných trojuholníkoch so základňou dĺžky $2 \cdot x$ (čiže BSC, DSE, FSA) si označme uhly pri bodoch pôvodného šesťuholníka β. Keď sa pozrieme na pôvodný šesťuholník, vidíme, že každý jeho vnútorný uhol má veľkosť $\alpha+\beta$. Máme dokopy 6 trojuholníkov, takže celkový súčet vnútorných uhlov týchto trojuholníkov bude $6 \cdot 180° = 1080°$. Keď odrátame uhly, ktoré sú pri bode S (tvoria celý kruh, čiže 360°), dostaneme $1080° - 360° = 720°$. Ostávajú nám uhly, ktoré sú pri základniach rovnoramenných trojuholníkov, to je dokopy $6 \cdot (\alpha + \beta) = 720°$, a teda $\alpha + \beta = \frac{720}{6} = 120°$. To znamená, že všetky uhly šesťuholníka majú veľkosť 120°.



Keďže poznáme vzdialenosť medzi 1. a 4. kolíkom, tak si ju nakreslíme, bude to úsečka AD. Pozrime sa na štvoruholník $ADCB$. Uhly ABC a BCD sú zhodné, takisto aj ramená BA a CD. Ak urobíme v tomto štvoruholníku uhlopriečky, dostaneme trojuholníky ABC a BDC. Tieto trojuholníky majú po dve strany zhodné (s dĺžkami x a $2 \cdot x$) a uhol medzi nimi je tiež zhodný, tieto dva trojuholníky sú potom zhodné (ide o vetu o zhodnosti trojuholníkov SUS). No v takom prípade sú zhodné aj strany AC a BD, teda uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$. Aby štvoruholník mohol mať všetky tieto vlastnosti, musí sa jednať o rovnoramenný lichobežník. To ale znamená, že úsečky AD a BC musia byť rovnobežné. Uhly ABC a BCD majú veľkosť 120°. Pretože lichobežník je rovnoramenný, uhly BAD a CDA budú tiež zhodné. Aby sme zistili ich veľkosť, stačí nám vedieť nasledovné: Súčet vnútorných uhlov každého štvoruholníka je 360°, odčítame uhly ABC a BCD (ktoré majú každý veľkosť 120°) a rozdelíme na polovice, preto ich veľkosť bude $(360° - 2 \cdot 120°)/2 = 60°$.



Ak spravíme rovnobežku s úsečkou AB, ktorá prechádza bodom C a priesečník tejto rovnobežky so stranou AD si označíme Z, vznikne nám rovnobežník $AZCB$. Rovnobežník je štvoruholník, ktorého protiľahlé strany sú rovnobežné a rovnako dlhé. Keďže v rovnobežníku platí, že protiľahlé strany sú rovnako dlhé, AZ má dĺžku $2 \cdot x$, keďže BC má tiež dĺžku $2 \cdot x$. ZC má potom dĺžku x. Tiež platí, že protiľahlé uhly v rovnobežníku sú rovnaké. Uhol CZA má teda veľkosť 120° rovnako, ako uhol ABC. Uhol DZC má potom veľkosť 180°–120° = 60°, lebo Z leží na úsečke AD. Vieme, že CDZ je tiež 60°, takže v trojuholníku CDZ vieme 2 uhly: 60° a 60°. Tretí uhol ZCD je teda 180° – 2·60° = 60°. Všetky uhly sú 60°, z čoho vyplýva, že trojuholník ZCD je rovnostranný. Vieme, že $|CD| = x$, a teda všetky strany tohto trojuholníka majú dĺžku x. A keďže $|AZ| = 2 \cdot x$ a $|ZD| = x$, musí platiť $|AD| = 3 \cdot x$. No my vieme, že $|AD|$ = 9 m. To znamená, že $x = 9/3 = 3$ m.

Na lano s dĺžkou x, teda 3 m sa zmestí 3/0,5 = 6 Muchachov, keďže každý potrebuje pol metra. Na lano s dĺžkou $2 \cdot x$, teda 6 m sa zmestí dvakrát viac, 6/0,5 = 12 Muchachov. Šesťuholník $ABCDEF$ sa skladá z 3 lán s dĺžkou x a 3 lán s dĺžkou $2 \cdot x$. Počet Muchachov, čo si môže sadnúť na laná je teda 3·6 + 3·12 = **54**.

Bodovanie:

dôkaz, že uhly šesťuholníka majú 120° – 2b.; zistenie, že $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník s danými uhlami – 1b.; ukázanie, že modrého lano má 3 m – 1b.; správny výsledok – 1b.

Úloha S2: Svetlušky – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*

Nad riekou lietalo 13 modrých, 15 žltých a 17 bielych svetlušiek. Keď sa stretli dve svetlušky rôznych farieb, obe zmenili svoje farby na tretiu farbu (napr. modrá a biela by sa pri stretnutí zmenili na žlté). **Existuje taká postupnosť stretnutí, že na konci budú mať všetky svetlušky rovnakú farbu? Ak áno, aká? Ak nie, prečo?**

Na začiatku máme 13 modrých, 15 žltých a 17 bielych svetlušiek, spolu teda 45 svetlušiek.

Pozrime sa najprv, ako bude vyzerať posledné stretnutie, ak postupnosť potrebná na splnenie podmienky zo zadania existuje. Jediná možnosť je, že jednej farby bude 43 svetlušiek a zvyšné dve farby budú mať po 1 svetluške. Z farieb, kde je už len po 1 svetluške, sa tieto 2 svetlušky stretnú a dosiahneme finálny stav. Všimnime si ale, že najprv sa muselo stať, že dve rôzne farby mali rovnaký počet svetlušiek. Tento počet ani nemusí byť nutne 1, veď hneď ako budú mať dve farby rovnaký počet svetlušiek, tak sa nám iba všetky postretávajú a premenia sa na tretiu farbu.

Všimnime si teraz, ako sa môžu meniť rozdiely medzi dvoma rôznymi farbami. Konkrétne sa budeme pozerať na rozdiely medzi počtami bielych a žltých svetlušiek (označme si tento rozdiel **B**–**Ž**), žltých a modrých svetlušiek (**Ž**–**M**), no a bielych a modrých svetlušiek (**B**–**M**). Budeme sa na tieto rozdiely vždy pozerať práve v tomto poradí. Čo sa môže s týmito rozdielmi udiať pri stretnutí dvoch svetlušiek? Vlastne len dve veci:

Prvou možnosťou je, že ide o dve farby, z ktorých zoberieme po 1 svetluške. To nám však **rozdiel** medzi týmito farbami **nezmení**, lebo sme len počet svetlušiek v každej farbe zmenšili o 1. Druhou možnosťou je, že z jednej farby 1 svetlušku odoberieme a v druhej farbe 2 svetlušky pribudnú. Toto nám celkový **rozdiel buď zvýši, alebo zníži o 3**.

Na začiatku sú rozdiely medzi farbami nasledovné: 17–15 = **2**, 15–13 = **2**, 17–13 = **4**. My potrebujeme docieliť, aby ktorýkoľvek z nich dosiahol hodnotu **0** (teda aby dve farby mali rovnaký počet svetlušiek). Ale ako sme zistili, jediné, čo s rozdielom dokážeme urobiť je, že ho zväčšíme alebo zmenšíme o 3. Vidíme, že takýmto spôsobom sa nám **ani rozdiel 2, ani rozdiel 4 nikdy nepodarí zmeniť na rozdiel 0.** Z toho teda jasne vyplýva, že hľadaná postupnosť stretnutí neexistuje.

Bodovanie:

poznatok, že treba dosiahnuť rovnaký počet svetlušiek v dvoch farbách – 0,5b.; poznatok, že rozdiel medzi dvoma farbami sa mení vždy o 3 – 1,5b.; poznatok, že potrebujeme dosiahnuť rozdiel medzi dvoma farbami 0 – 1b.; správne použitie týchto poznatkov – 2b.

Poznámka:

Existuje jeden špeciálny prípad, ako sa môže zmeniť rozdiel v počtoch svetlušiek dvoch farieb. Napríklad ak sa hneď na začiatku stretne modrá a biela svetluška, bude bielych svetlušiek 16 a žltých 17 (vznikli dve nové). Teda rozdiel medzi počtami žltých a bielych sa zmeni z **2** na **1**. Zdalo by sa teda, že sme dosiahli aj inú zmenu rozdielu ako práve o 3. Avšak keď sa pevne pozeráme na rozdiel v poradí **B**–**Ž**, pôvodne bol 17–15 = **2** a po stretnutí je vlastne 16–17 = **–1**. Vidíme, že rozdiel sa teda skutočne zmenil o 3. To, že je rozdiel záporný, vôbec nevadí, iba to určuje, na ktorej kôpke je viac svetlušiek.

Úloha S3: Hrobárov zisk – *Opravoval Peter „Bubu“ Onduš*

Na tabuľke stálo: „Tu sú zisky predošlého hrobára. Nech mu je zem ľahká!“ Zisky hrobára boli zapísané celými číslami v tabuľke 3 × 3. Súčty čísel v riadkoch zhora nadol stúpali o 2 a súčty čísel v stĺpcoch sa zľava doprava zdvojnásobovali. Pod tabuľkou bolo ešte napísané: „Ak sčítaš čísla v ľavom stĺpci, získaš posledný mesačný zisk hrobára.“ **Ak bol súčet jedného z riadkov 1234, aký bol hrobárov posledný mesačný zisk?**

Našou úlohou je zistiť súčet čísel v prvom stĺpci. Preto si uvedomme jednu veľmi podstatnú vec: Skoro vôbec nás nezaujíma, aké konkrétne čísla budú v jednotlivých štvorčekoch a ani to nepotrebujeme vedieť, pretože vzťahy medzi súčtami v jednotlivých stĺpcoch a riadkoch máme presne dané. Jediné, čo treba je, aby *aspoň nejaké* takéto rozloženie čísel existovalo. Samotné nájdenie takéhoto rozloženia však nepostačuje na kompletné vyriešenie úlohy, veď čo ak existuje rozloženie, kde je výsledok iný?

Pozrime sa teda na tie súčty. Súčty čísel vo všetkých riadkoch aj vo všetkých stĺpcoch tabuľky musia byť celé čísla, pretože všetky čísla v tabuľke sú celé. Nazvime si s súčet čísel v prvom stĺpci a r súčet čísel v prvom riadku.

Vieme, že v každom riadku je súčet čísel o dva väčší ako v tom predchádzajúcom, a v každom stĺpci dvojnásobný oproti tomu predchádzajúcemu. Pozrime sa, aký bude celkový súčet všetkých čísel v tabuľke. Musí platiť, že či už čísla sčítame po riadkoch, alebo po stĺpcoch, dostaneme rovnaký súčet, pretože sme sčítali tie isté čísla (hoc nevieme aké konkrétne sú). Preto platí:

$$r + (r + 2) + (r + 4) = s + 2s + 4s$$

Teda

$$3r + 6 = 7s$$

Z čoho vieme, že súčet stĺpca závidí od súčtu riadku takto:

$$s = \frac{3r + 6}{7}$$

A zo zadania is pamätáme, že to musí byť celé číslo. Teraz využijeme ďalšiu informáciu, ktorú máme: súčet v jednom riadku je 1234. Keďže nevieme, v ktorom riadku to je, tak musíme vyskúšať tri možnosti. Prvá možnosť je, že súčet 1234 je v prvom riadku (teda $r = 1234$). Druhá možnosť je, že súčet 1234 v druhom riadku, a potom v prvom riadku je súčet $r = 1232$. Posledná možnosť je, že tento súčet je v treťom riadku, v prvom riadku je teda súčet $r = 1230$.

Pozrime sa, aký by bol v týchto prípadoch posledný mesačný zisk hrobára – aké by bolo s.

V prvom prípade by sa s rovnalo $s = \frac{3 \cdot 1234 + 6}{7} \doteq 529{,}714$, čo nie je celé číslo, túto možnosť môžeme vylúčiť. V druhom prípade by sa s rovnalo $s = \frac{3 \cdot 1232 + 6}{7} \doteq 528{,}857$, čo znova nie je celé číslo, zostáva teda už len posledná možnosť. V tom prípade sa s rovná $s = \frac{3 \cdot 1230 + 6}{7} = 528$, čo je konečne celé číslo, a teda aj výsledok.

Hrobárov posledný mesačný zisk bol 528. Dôležitou súčasťou úlohy je však tiež ukázať, že takéto rozloženie tabuľky skutočne môže existovať. Napríklad...

528	702	0
0	354	878
0	0	1234

Bodovanie:

výsledok 528 – 1b.; zistenie, že súčet čísel v tabuľke je deliteľný 7 – 1,5b.; za všeobecné riešenie – 2,5b.; za chýbajúci príklad rozloženia čísel v tabuľke som body nestrhával.

Úloha S4: Mince – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Muž mal 4 mince, niektoré dvojdolárovky, niektoré jednodolárovky. Mince mali na jednej strane číslo, na druhej len obrázok. Muž si ich hodil a súčet čísel na horných stranách mincí bol 1. Pravdepodobnosť, že nastala táto situácia, bola 1/8. **Aká bola v tomto prípade pravdepodobnosť, že ak by si muž hodil mince, dostal by na horných stranách súčet 3?**

Pozrime sa, čo nám môže padnúť, keď máme 4 mince – 0 bude znamenať obrázok (keďže má hodnotu 0) a Č bude znamenať číslo (zatiaľ nevieme, či 1 alebo 2). Naše možnosti môžeme vypísať napríklad takto:

0000 000Č 00Č0 00ČČ 0Č00 0Č0Č 0ČČ0 0ČČČ Č000 Č00Č Č0Č0 Č0ČČ ČČ00 ČČ0Č ČČČ0 ČČČČ

To je spolu 16 možností. Použijeme pritom pevne dané poradie mincí, ktoré v priebehu úlohy nebudeme meniť. To znamená, že prvá pozícia v štvorčíslí vždy znamená prvú mincu. Pri každej z mincí je rovnaká šanca, že padne číslo. Avšak pozor, to neznamená, že je rovnaká šanca, že padnú 2 čísla, než ako že padnú 4 čísla. 2 čísla padajú v šiestich prípadoch (00**ČČ**, 0**Č**0**Č**, 0**ČČ**0, **Č**00**Č**, **Č**0**Č**0, **ČČ**00), 4 čísla len v jednom prípade (**ČČČČ**). Ale každá možnosť (každé štvorčíslie) *jednotlivo* má rovnakú šancu, že nastane.

Keďže každá z týchto 16 možností má rovnakú šancu a celková **pravdepodobnosť, že padne súčet 1 je jedna osmina**, tak to musí byť **osmina z tých 16 prípadov**, čiže súčet jedna musí padnúť v **dvoch prípadoch**.

Súčet 1 padne iba vtedy, ak padne práve jedna jednotka a zvyšok obrázky. Nijak inak sa súčet 1 dosiahnuť nedá. Jedná sa teda o možnosti 000Č, 00Č0, 0Č00 a Č000. Keďže požadovaný súčet 1 má nastať v dvoch z týchto prípadov, musíme mať medzi mincami práve dve jednotky. Zvyšné dve mince budú teda dvojky.

Teraz už vieme, že máme mince 1, 1, 2 a 2. Zadanie sa však pýta, aká je pravdepodobnosť, že padne súčet 3. Tu stačí do našich 16 prípadov, ktoré sme si vypísali na začiatku, dosadiť za všetky „Č" cifry (na príslušnej pozícii) z 1122. Dostaneme:
0000 000Č 00Č0 00ČČ 0Č00 0Č0Č 0ČČ0 0ČČČ Č000 Č00Č Č0Č0 Č0ČČ ČČ00 ČČ0Č ČČČ0 ČČČČ
0000 0002 0020 0022 0100 **0102 0120** 0122 1000 **1002 1020** 1022 1100 1102 1120 1122

Súčet 3 sa vyskytol v 4 (zvýraznených) prípadoch, ide teda o 4 možnosti zo 16, čiže pravdepodobnosť je **4/16 = 1/4 = 25%**.

Bodovanie:
ukázanie, že máme 16 možností, čo môže padnúť – 1b.; vysvetlenie, že mince musia mať hodnoty 1, 1, 2, 2 (najdôležitejšia časť úlohy) – 3b.; spočítanie, že súčet 3 majú 4 možnosti zo 16, a teda pravdepodobnosť 1/4 – 1b.

Úloha S5: Šair vs. Nakaru – *Opravoval Marián „Majo" Poturnay*

Nakaru okúsil ohnivú vodu len raz v živote. Hádal sa vtedy so Šairom – počítali, aký vyjde zvyšok, keď vydelia rôzne prvočísla tridsiatimi. Nakaru tvrdil, že im vždy ako zvyšok vyjde buď 1 alebo prvočíslo a Šair to nechcel uznať. Nakoniec mu Šair podal na zmierenie fľašu silnej whiskey, Nakaru naivne prijal ponúkaný zmier a napil sa. Šair potom opitého Nakarua zmanipuloval na vyhlásenie, že sa mýlil, a že on, Šair, mal pravdu. **Dokáž, že sa Nakaru nemýlil.**

Po delení ľubovoľného čísla tridsiatimi môžeme dostať zvyšok od 0 po 29.
Na úvod vyriešme úlohu pre čísla menšie ako 30. Každé číslo, ktoré je menšie ako 30, dáva po delení číslom 30 podiel 0. Zvyšok po delení 30 takého čísla je rovnaký ako číslo, ktoré delíme. Preto **ak delíme nejaké prvočíslo menšie ako 30 číslom 30, zvyšok bude určite rovnakým prvočíslom**. Pre čísla menšie ako 30 mal teda Nakaru pravdu.

Ďalej to dokážme pre čísla väčšie alebo rovné 30. Predstavme si, že zoberieme ľubovoľné číslo a vydelíme ho 30-timi. **Ak to bolo prvočíslo, tak podľa tvrdenia v zadaní sme museli dostať zvyšok 1 alebo prvočíslo.** Čo z toho vyplýva? Že **ak dostaneme zvyšok, ktorý je zložené číslo, tak pôvodné číslo nebolo prvočíslom.** Keď dokážeme túto vetu, dokážeme tým aj pôvodné tvrdenie zo zadania. (Zamyslite sa nad tými dvoma vetami poriadne. Uvidíte, že naozaj hovoria to isté – ak je jedna z nich pravdivá, je pravdivá aj druhá, a naopak). Chceme preto ukázať, že **pri delení prvočísla 30-timi nemôžeme dostať zvyšky 0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27 a 28.**

Všimnime si, že každé prirodzené číslo väčšie alebo rovné 30 vieme zapísať v tvare $30 \cdot a + b$, kde a je nejaké prirodzené číslo (počet, koľkokrát sa v danom čísle nachádza číslo 30) a b je zvyšok tohto čísla po delení 30. **Ak je b párne, tak aj $30 \cdot a$, aj b sú deliteľné dvomi**, a tak by toto číslo bolo deliteľné dvomi – nebolo by prvočíslom. Vďaka tomu vieme vylúčiť všetky párne zvyšky: 0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 a 28.

Zostáva nám už len vylúčiť zvyšky **9, 15, 21, 25 a 27.** Tie vylúčime podobným spôsobom, ako v predošlom prípade. **Ak je b deliteľné tromi, tak sú obe čísla $30 \cdot a$ aj b deliteľné tromi** – pôvodné číslo preto nemohlo byť prvočíslom. Zvyšok teda nie je deliteľný ani tromi. To nám vylúčilo zvyšky 9, 15, 21 a 27. Už treba vylúčiť iba zvyšok 25. Opäť stačí použiť rovnaký princíp – **ak je b deliteľné piatimi, sú aj $30 \cdot a$, aj b deliteľné piatimi**. To znamená, že pôvodné číslo by muselo byť deliteľné piatimi, a preto to nemôže byť prvočíslo. Tým sme vylúčili všetky zvyšky, ktoré nie sú 1 alebo prvočíslo.

Ukázali sme, že ak zvyšok, ktorý dostaneme nie je 1 alebo prvočíslo, tak potom ani číslo, ktoré sme delili, nemohlo byť prvočíslom. To znamená, že **prvočísla musia po delení 30-timi dávať zvyšok buď 1, alebo prvočíslo.** Nakaru sa nemýlil.

Bodovanie:
ukázanie, že to platí pre čísla menšie ako 30 – 0,5b.; ukázanie, že to platí aj pre všetky ostatné čísla – 4,5b.

Poznámka:
Nakaruovo tvrdenie treba osobitne dokázať pre čísla menšie ako 30. Ak by sme totiž použili uvedený postup, pripúšťajúc $a = 0$, naše tvrdenia všeobecne neplatia, lebo niektoré prvočísla menšie ako 30 môžu byť deliteľné 2, 3 či 5.