Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Úloha 1: Kvapky – *Opravoval Ľudmila Šimková a Fedor Župník*

Kvapky v potoku rozmýšľali, koľko kvapiek sa včera pridalo k Potoku. Počet kvapiek, ktoré sa včera pridali, bol päťciferné číslo so zaujímavou vlastnosťou: Ak prečiarkneme prvé dve číslice tohto päťciferného čísla a za takto získané trojciferné číslo pripíšeme číslicu 8, dostaneme štvorciferné číslo. Toto štvorciferné číslo bude štyrikrát menšie ako pôvodné päťciferné číslo. **Urči, koľko kvapiek sa včera pridalo k Potoku, teda nájdi všetky päťciferné čísla s touto vlastnosťou.**

Počet kvapiek, ktoré sa pridali k Potoku je päťciferné číslo. Môžeme si ho zapísať takto $\overline{ABCDE}$ – každé písmeno predstavuje jednu cifru. Ak vyškrtneme prvé dve cifry, A a B, a na koniec pripíšeme 8, dostaneme štvorciferné číslo $\overline{CDE8}$. Vieme, že číslo $\overline{CDE8}$ je štyrikrát menšie ako číslo $\overline{ABCDE}$. Zapíšme si to ako násobenie pod seba. Poslednú cifru horného čísla poznáme, a tak môžeme začať násobiť štvorkou cifry od konca tak, ako sme zvyknutí.

$$\begin{array}{r} C\ D\ E\ 8 \\ \cdot\ 4 \\ \hline A\ B\ C\ D\ E \end{array}$$

4 · 8 = 32 Dvojku napíšeme a tri nám ostali. Zistili sme, že písmeno E predstavuje cifru 2. Tým sa nám podarilo odkryť ďalšiu cifru v hornom čísle, a tak môžeme pokračovať v násobení ďalej.

$$\begin{array}{r} C\ D\ 2\ 8 \\ \cdot\ 4 \\ \hline A\ B\ C\ D\ 2^{3} \end{array}$$

4 · 2 = 8 Nemôžeme zabudnúť pripočítať prechod cez desiatku z minulého kroku.

8 + 3 = 11 Jednotku napíšeme a jedna nám ostala. Písmeno D prepíšeme na cifru 1 a násobíme ďalej.

$$\begin{array}{r} C\ 1\ 2\ 8 \\ \cdot\ 4 \\ \hline A\ B\ C\ 1^{1}\ 2 \end{array}$$

4 · 1 = 4 Z minulého kroku nám ostala jednotka.

4 + 1 = 5 Päťku napíšeme a neostalo nám nič. Písmeno C predstavuje cifru 5. Podarilo sa nám odkryť všetky cifry horného čísla, chýba už len A a B v spodnom.

$$\begin{array}{r} 5\ 1\ 2\ 8 \\ \cdot\ 4 \\ \hline A\ B\ 5^{0}\ 1\ 2 \end{array}$$

4 · 5 = 20 Z minulého kroku nám neostalo nič. Nulu napíšeme a dve nám ostali. Písmeno B predstavuje cifru 0.

$$\begin{array}{r} 5\ 1\ 2\ 8 \\ \cdot\ 4 \\ \hline A\ 0^{2}\ 5\ 1\ 2 \end{array}$$

V hornom čísle sme neodkryli žiadne nové písmeno, a tak nie je čo ďalej násobiť. Dve, čo nám ostali, dopíšeme na začiatok namiesto písmena A, čím sme odkryli aj celé spodné číslo. Nakoniec ešte overíme, či je výpočet správny.

$$\begin{array}{r} \underline{5}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{8} \\ \cdot\ 4 \\ \hline \underline{2}\ \underline{0}^{2}\ \underline{5}^{0}\ \underline{1}^{1}\ \underline{2}^{3} \end{array}$$

K Potoku sa pridalo 20512 kvapiek.

Bodovanie:

za správny výsledok – 3b.; za kompletný postup – 2b.

Úloha 2: Študentské klamstvá – *Opravovali Terézia „Tete“ Gurová a Patrik Drozdík*

Každý z 36 študentov buď vždy hovoril pravdu, alebo vždy klamal. Taktiež mal každý z nich rád práve jednu činnosť: buď spev, alebo tanec, alebo matematiku. Učiteľ položil všetkým študentom tieto tri otázky: Máš rád spev? Máš rád tanec? Máš rád matematiku? Každý zo študentov odpovedal na všetky tri otázky. Na prvú otázku povedali ôsmi „áno“, na druhú odpovedali dvanásti „áno“ a na tretiu odpovedali dvadsiati „áno“. **Koľkí spomedzi študentov boli klamári?**

Na začiatok si zopakujme, že v triede existujú iba dva typy študentov: pravdovravní a klamári. Na základe tohto si v tejto úlohe bolo treba uvedomiť jednu dôležitú vec. Keďže študenti odpovedali na všetky tri otázky, mohli odpovedať nasledovne:

- pravdovravný: 1 ÁNO - na činnosť, ktorú má rád a 2 NIE - na činnosti, ktoré nemá rád
- klamár: 2 ÁNO - na činnosti, ktoré nemá rád a 1 NIE - na činnosť, ktorú má rád

Inak klamár nemohol odpovedať, pretože podľa zadania musí vždy klamať. Môžeme si všimnúť, že klamári vždy odpovedajú o 1 ÁNO viac ako pravdovravní.

Teraz si spočítajme celkový počet ÁNO.

	Máš rád spev?	Máš rád tanec?	Máš rád matematiku?	**spolu**
Počet ÁNO	8	12	20	**40**

Keďže máme 40 odpovedí ÁNO ale iba 36 žiakov, vidíme, že niekoľko žiakov muselo odpovedať ÁNO viac ako jedenkrát. To mohli iba klamári, ktorí odpovedali ÁNO dvakrát. Pozrime sa teda, o koľko ÁNO máme viac, ako keby všetci hovorili pravdu. 40 - 36 = 4, teda o 4 viac ÁNO.

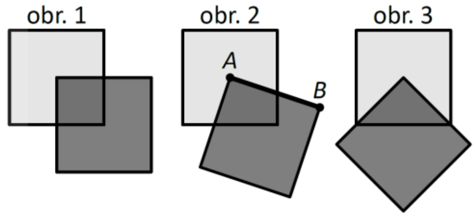
Keďže klamári vždy odpovedajú o 1 ÁNO viac ako pravdovravní, *klamári boli dokopy štyria.*

Bodovanie:

za vysvetlenie, prečo klamár hovorí 2 ÁNO a tým pridáva o 1 viac ÁNO ako pravdovravný – 3b.; za správny postup – 1b.; za správny výsledok – 1b.

Úloha 3: Papieriky na hladine – *Opravovali Michaela Zatrochová, Natália Čigašová, Branislav Bubán a Juraj Jankovich*

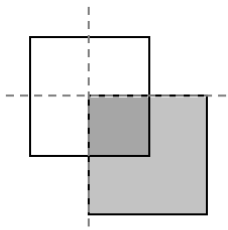
Deti hádzali do potoka dvojice papierikov zlepených dokopy. Tie boli zlepené tak, že tmavý štvorcový papierik bol svojím rohom prilepený v strede svetlého, rovnako veľkého štvorcového papierika. Tri takéto dvojice papierikov mali každá nejakú zaujímavú vlastnosť:



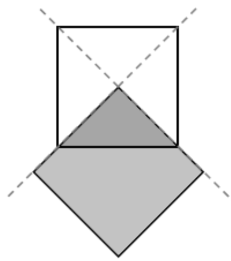
1. V prvej dvojici strany tmavého papierika pretínali strany svetlého papierika v ich stredoch (obr. 1).
2. V druhej dvojici vyznačená strana AB tmavého papierika pretínala stranu svetlého papierika presne v tretine jej dĺžky (obr. 2).
3. V tretej dvojici strany tmavého papierika prechádzali vrcholmi svetlého papierika (obr. 3).

V ktorej z týchto troch dvojíc bol obsah prieniku (prekryvu) papierikov najväčší? Prečo?

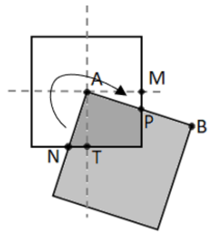
Pri riešení tejto úlohy sa dalo postupovať viacerými spôsobmi. Jeden zo spôsobov bol výpočtový – mohli sme si určiť nejakú vhodnú stranu štvorca, a potom podľa známych vzorcov rátať obsahy. Ďalším spôsobom bola nasledujúca úvaha.



V prvom prípade vieme, že strany tmavého papierika pretínajú svetlý papierik v stredoch jeho strán a jeho vrchol je v strede svetlého papierika. To znamená, že ak si predĺžime strany tmavého papierika, tak nám vzniknú priamky. Tieto priamky prechádzajú cez stredy strán svetlého papierika. Každá z nich teda delí svetlý papierik na polovice a dokopy ho rozdeľujú na 4 rovnaké štvorčeky. Prienik svetlého a tmavého papierika je teda ¼ obsahu svetlého papierika.



Trošku zmeníme poradie a ukážeme si teraz tretí prípad. V treťom prípade sa dalo postupovať podobne ako pri prvom. Predĺžime si strany tmavého papierika a vytvoríme tak priamky, ktoré prechádzajú náprotivnými vrcholmi štvorca. Takého čiary voláme uhlopriečky. Každá uhlopriečka delí štvorec na polovice. Dokopy nám teda vytvoria štyri rovnaké časti – trojuholníky – pričom jedna z nich je prienikom papierikov. Opäť je to ¼ obsahu svetlého papierika.



Druhý prípad bol najkomplikovanejší. Zo zadania vieme, že tmavý papierik je pootočený nasledovne: úsečka AB pretína stranu svetlého štvorca v tretine jej dĺžky. Mnohí z Vás už jasne z obrázka videli, že si môžeme „preniesť“ malý sivý trojuholník ANT na miesto trojuholníka APM (ako naznačuje šípka na obrázku). Potom nám opäť vznikne malý štvorček tvoriaci ¼ obsahu svetlého papierika. Najdôležitejším bodom bolo ukázať, že trojuholníky ANT a APM sú rovnaké obsahom, len inak otočené. Prerušované priamky v obrázku prechádzajú stredmi strán svetlého štvorca. Čiže body M a T sú stredy strán svetlého papierika. Keďže A je stredom svetlého papierika, môžeme povedať, že AM a AT majú dĺžku rovnajúcu sa polovici dĺžky strany svetlého papierika. Keďže spojnice stredov strán sú kolmé na strany, tak tiež vieme, že uhol pri vrchole M a uhol pri vrchole T je určite pravý. Čo nám ešte chýba ku istote, že spomínané dva trojuholníky sú rovnaké, je porovnanie úsečiek MP a TN. Keďže bod P je presne v tretine dĺžky strany, tak úsečka MP je rovná rozdielu ½ - ⅓ = ⅙ dĺžky strany štvorca. Bod N sa nachádza tiež v tretine dĺžky strany, čiže úsečka NT je tiež rovná rozdielu ½ - ⅓ = ⅙ dĺžky strany štvorca. Trojuholníky teda majú rovnaký uhol a dve strany (v skutočnosti majú rovnaké všetky uhly a všetky strany). Matematicky povedané, podľa vety SUS sme dokázali zhodnosť trojuholníkov ANT a AMP. Prienikom papierikov je teda znova ¼ obsahu svetlého papierika.

Odpoveď znie: prieniky boli vo všetkých prípadoch rovnaké.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1b.; za vysvetlenie 1. a 3. prípadu – každé 1b.; za vysvetlenie 2. prípadu – 2b.

Úloha 4: Kamienky – *Opravovali Martin „Panda“ Svetlík, Dominika Krivdová, Michaela „Neci“ Jančovičová a Andrej Špitalský*

Vždy počas poobednej prestávky sa Paťo a Patrik pozerali na kôpku kamienkov vyplavených na breh rieky. Pri jednej z takýchto prestávok sa medzi nimi odohral zvláštny rozhovor:
Patrik: „Včera po robote som spočítal kamienky na tejto kôpke.“
Paťo: „Ale nevrav, ozaj? A koľko ich je?“
Patrik: „To ti nepoviem, ale prezradím ti, že ak by som z nich jeden odobral, počet zvyšných kamienkov by bol deliteľný jednotkou.“
Paťo: „Ale to predsa platí o každom možnom počte kamienkov!“
Patrik: „Tak ti poviem aj to, že keby som zo zostávajúcich kamienkov následne odobral ešte ďalšie dva kamienky, počet zvyšných kamienkov by bol deliteľný dvoma.“
Paťo: „Dobre, tým sa niektoré možnosti vylúčili, ale stále ich je priveľa...“
Patrik: „Nuž, keby som potom z kôpky odobral ešte ďalšie tri kamienky, počet zostávajúcich kamienkov by bol deliteľný tromi.“
Paťo: „To je síce zaujímavé, ešte stále však neviem s istotou určiť, koľko bolo na tej kôpke kamienkov.“
Patrik: „Neprerušuj ma. Keby som napokon zo zostávajúcich kamienkov odobral ešte ďalšie štyri, počet tých, čo by na kôpke zvýšili, by bol deliteľný štyrmi.“
Paťo: „Tak počkaj, teraz si zo mňa už strieľaš! Taký počet neexistuje!“
Kto mal pravdu? Ak Patrik, aký bol pôvodný počet kamienkov na kôpke? Ak Paťo, prečo neexistuje počet kamienkov, ktorý by spĺňal všetky Patrikove podmienky?

Po prvom odobraní vzal Patrik 1 kamienok, po druhom odobraní zobral spolu 1+2=3 kamienky, po treťom vzal dohromady 1+2+3=6 kamienkov a po poslednom odobraní vzal celkovo 1+2+3+4=10 kamienkov.

Po prvom odobraní bol zvyšný počet kamienkov deliteľný jednotkou, ale to platí, ako správne poznamenal Patrik, o každom možnom počte kamienkov. Táto informácia nám teda nijako nepomôže.

Pozrime sa teda na situáciu po druhom odobraní. Zo zadania vieme, že počet kamienkov po druhom odobraní musí byť párny. Keďže chceme, aby bol počet kamienkov po druhom odobraní párny a od pôvodného počtu kamienkov odoberáme celkovo nepárny počet kamienkov (3), **musí byť pôvodný počet kamienkov nepárny**, lebo párne číslo (nový počet kamienkov) plus nepárne číslo (3, ktoré sme odobrali) je vždy nepárne číslo.

Keď Patrik odoberie ďalšie 3 kamienky, nový počet zvyšných kamienkov je nepárny, keďže sme od párneho počtu kamienkov odobrali nepárny počet kamienkov. Takáto situácia mohla bez problémov nastať. Napríklad ak by bolo predtým 12 kamienkov (deliteľné dvomi), tak po odobraní ďalších 3 by ostalo 9 kamienkov, čo je deliteľné tromi.

Keď počas posledného odoberania vezme ďalšie 4 kamienky (pričom vieme, že číslo 4 je párne), **zvyšný počet kamienkov bude stále nepárny**. Avšak, na to aby bol tento počet deliteľný štyrmi, by sme potrebovali, aby bol párny a nie nepárny, pretože každé číslo deliteľné štyrmi je zároveň párne.

Pri druhom odoberaní sme zistili, že pôvodný počet kamienkov musel byť nepárny, avšak zároveň sme pri štvrtom odoberaní zistili, že musel byť pôvodný počet kamienkov párny. Žiadne číslo však nemôže byť párne aj nepárne zároveň. Pravdu mal teda Paťo.

Bodovanie:
za správnu odpoveď – 1b.; za vysvetlenie, prečo také číslo nemôže existovať – 4b.

> **Úloha 5: Borovicový les** – *Opravovali Karolína Pisoňová a Michaela Rusnáková*
> Borovíc v lese bolo toľko, že keby ich niekto postupne očísloval 1, 2, 3, …, použil by trikrát viac cifier, než bolo samotných borovíc. **Koľko bolo v lese borovíc?**

Na to, aby sme na očíslovanie všetkých borovíc v lese mohli použiť trikrát viac cifier, potrebujeme, aby sme na každú borovicu použili v priemere tri cifry. Priemerný počet cifier použitých na jednu borovicu získame tak, že vydelíme počet všetkých použitých cifier počtom borovíc. Keďže chceme, aby počet všetkých použitých cifier (označme ho ako C) bol trikrát väčší ako počet borovíc (označme B), tak má platiť: $C=3\cdot B$, a teda priemer $C/B=3$.

Hneď môžeme vidieť, že v lese nemohol byť jednociferný ani dvojciferný počet borovíc, lebo vtedy použijeme na každú borovicu menej ako tri cifry (jednu alebo dve), a teda priemerný počet použitých cifier na jednu borovicu bude určite menší ako 3.

Na každé trojciferné číslo už síce použijeme tri cifry, lenže začíname číslovať od jednociferných čísel, ktoré majú menší priemer použitých cifier na borovicu. Teda aj pri trojcifernom počte borovíc bude priemerný počet cifier použitých na jednu borovicu menší ako 3. **Borovíc v lese teda musel byť viac ako trojciferný počet.**

Pozrime sa teraz koľko cifier nám chýba pri najvyššom možnom trojcifernom počte borovíc (999) na to, aby priemer použitých cifier na jednu borovicu bol 3:

- Jednociferných čísel je 9 (1 –9) a za každé jednociferné číslo nám chýbajú 2 cifry.
- Dvojciferných čísel je 90 (10 – 99) a za každé dvojciferné číslo nám chýba jedna cifra.
- Trojciferných čísel je 900 (100 – 999) ale pri nich máme správny počet cifier, teda pri nich nám nechýba nič.

Celkovo nám teda do správneho priemeru chýba 18+90=108 cifier.

Štvorciferné čísla používajú až 4 cifry na označenie jednej borovice, čo je o jednu cifru viac, ako potrebujeme na to, aby bol priemer rovný 3. Teda každé štvorciferné číslo má jednu cifru nad priemer rovný trom. Chýbajúce cifry do priemeru rovnému 3 pri jedno a dvojciferných číslach môžeme teraz dorovnať ciframi "navyše" zo štvorciferných čísel. Keďže nám na správny priemer chýbalo 108 cifier, teraz budeme potrebovať 108 cifier "navyše", čo dosiahneme tak, že použijeme 108 štvorciferných čísel, teda **počet borovíc bude rovný 1107** (pretože prvé štvorciferné číslo je 1000).

Pri ľubovoľnom vyššom počte borovíc by sme museli pridať najmenej štvorciferné číslo a teda priemerný počet cifier použitých na jednu borovicu by bol určite vyšší ako 3.

Bodovanie:
za správny výsledok – 1b.; za postup, ktorým ste našli správne riešenie – 2b.; za dostatočné odôvodnenie, že nevyhovujú iné počty borovíc – 2b.

Úloha 6: Veselé čísla – *Opravovali Jakub Poljovka, Martin Kliment, Peter Kochelka a Ivan Kushpel*

Nezáporné celé číslo (teda 0, 1, 2, 3, ...) nazvime veselé, ak jeho cifry zľava doprava klesajú a každé dve susedné cifry sa líšia aspoň o 2. Napríklad čísla 7, 820 a 97531 sú veselé, no čísla 24, 87 a 99753 nie. **Koľko nezáporných celých čísel je veselých?**

Pri riešení takýchto úloh máme dve možnosti. Môžeme sa pokúsiť vypísať postupne všetky zadané čísla, ktorých býva spravidla dosť veľa. Takýto postup je preto naozaj úmorný a človek sa pri tom ešte aj ľahko pomýli. Namiesto toho teda radšej skúsme vymyslieť spôsob, ako dokážeme spočítať všetky možnosti bez toho, aby sme si ich vypísali.

V tomto prípade bude dobré si tie veselé čísla potriediť do nejakých skupín, a potom už len jednoducho spočítať veselé čísla v jednotlivých skupinách. Väčšina z Vás takto spočítala najprv všetky 1-ciferné veselé čísla, pomocou nich potom všetky 2-ciferné, a tak ďalej až po všetky 5-ciferné (6-ciferné veselé čísla už neexistujú, pretože najväčšie veselé číslo je 97531).

Takéto triedenie tiež postupne viedlo k správnemu riešeniu, ale ukážeme si radšej ešte jeden spôsob, ktorý bol prehľadnejší a jednoduchší.

Veselé čísla si rozdelíme do desiatich skupín podľa toho, akou cifrou začínajú. Potom spočítame veselé čísla v jednotlivých skupinách. Najprv teda spočítame, koľko je veselých čísel začínajúcich nulou. Také je iba jedno, a síce 0. Teraz spočítame, koľko je veselých čísel začínajúcich jednotkou. Také je tiež jedno, a síce 1. Pre dvojku už také máme dve (2, 20). Pre trojku tri (3, 30, 31). Pre štvorku 5 (4, 40, 41, 42, 420).

Zamyslime sa teraz, koľko bude veselých čísel začínajúcich päťkou. Všimnime si, že jedno také veselé číslo bude päťka samotná. Teraz za tú päťku môžeme pripísať ľubovoľné veselé číslo, ktoré začína cifrou aspoň o dva menšou ako 5. Čiže najprv môžeme za päťku pripísať všetky veselé čísla začínajúce cifrou 3, potom všetky začínajúce cifrou 2, potom tie, čo začínajú cifrou 1 a nakoniec tie, čo začínajú cifrou 0. Počet veselých čísel, ktoré začínajú päťkou, teda vieme jednoducho vypočítať ako: 1 (päťka samotná) + veselé čísla začínajúce trojkou + veselé čísla začínajúce dvojkou + veselé čísla začínajúce jednotkou + veselé čísla začínajúce 0-ou. Čiže ich je: 1+3+2+1+1=8. Pre istotu si ich ešte poslednýkrát vypíšme: 5, 53, 530, 531, 52, 520, 51, 50.

Teraz si už stačí len uvedomiť, že podobne vieme uvažovať nie len pri päťke, ale aj pri veselých číslach začínajúcich šestkou, sedmičkou, osmičkou a deviatkou (dokonca sme takto vedeli uvažovať už pri veselých číslach začínajúcich dvojkou). Poďme si to ešte prehľadne zapísať do tabuľky:

Veselé čísla začínajúce cifrou...	výpočet	súčet
0	1	**1**
1	1	**1**
2	1+**1**	**2**
3	1+1+**1**	**3**
4	1+1+1**+2**	**5**
5	1+1+1+2+**3**	**8**
6	1+1+1+2+3+**5**	**13**
7	1+1+1+2+3+5+**8**	**21**
8	1+1+1+2+3+5+8+**13**	**34**
9	1+1+1+2+3+5+8+13+**21**	**55**

Teraz už len sčítame veselé čísla v jednotlivých skupinách a máme výsledok:

1+**1**+**2**+**3**+**5**+**8**+**13**+**21**+**34**+**55** = 143

Existuje 143 veselých čísel.

Bodovanie:

Za kompletné riešenie sme udeľovali 5 bodov. V prípade vynechania nejakých možností alebo doplnenia nejakých možností navyše sme udeľovali body podľa závažnosti a počtu chýb.

Úloha 7: Mince – *Opravovali Matúš Zubčák a Adriana Janáčková*
Kvapkám sa pomiešalo 5 pravých a 2 falošné mince. Vedeli, že každá pravá minca váži 20 g a každá falošná minca váži 18 g. Ochotná šťuka im požičala rovnoramenné váhy bez mierky či závaží. **Koľko *najmenej* vážení kvapkám stačilo, aby mohli s istotou povedať, ktoré mince boli pravé a ktoré falošné? Popíš presný systém váženia mincí.**

Kvapkám stačili tri váženia na to, aby vedeli s istotou určiť, ktoré mince boli pravé a ktoré falošné. Dalo sa to ukázať viacerými spôsobmi, uvádzame dva. S rôznymi obmenami fungovali aj iné. Cenný postreh bol, že nemá zmysel vážiť rôzne počty mincí, lebo strana s viac mincami vždy preváži stranu s menej mincami, bez ohľadu na to, ktoré mince sú pravé a ktoré falošné. Označme si mince písmenami A, B, C, D, E, F a G a poďme na to.

1. spôsob – na začiatku dáme tri mince na každú stranu váh (ABC-DEF). Môžu nastať dve možnosti:

1. **Váhy sú v rovnováhe.** To znamená, že na oboch stranách sú dve pravé mince a jedna falošná. Minca, ktorú sme nevážili (G), je pravá. Musíme teda pre každú trojicu určiť, ktorá minca je falošná. Pozrime sa najprv na trojicu ABC. Zoberieme mince A a B a porovnáme ich. Opäť máme dve možnosti, ako to môže dopadnúť:

    1) **Váhy sú v rovnováhe.** To znamená, že mince A a B sú pravé a falošná je minca C.
    2) **Jedna minca je ľahšia ako druhá.** Tá ľahšia minca je potom falošná, ťažšia minca a minca C sú pravé.

    Rovnakým spôsobom učíme, ktorá minca je falošná v trojici mincí D, E a F. V tejto možnosti sme teda potrebovali tri váženia (jedno úvodné a jedno pre každú stranu) na to, aby sme s istotou určili, ktoré mince sú pravé a ktoré falošné.

2. **Jedna strana je ľahšia ako druhá.** Strana, ktorá je ťažšia, obsahuje tri pravé mince. Ak by hoc jedna bola falošná, už nemáme dosť falošných mincí na to, aby išlo o ťažšiu stranu. Tieto – nech sú to napr. mince A, B, a C – odložíme. Ostali nám dve pravé a dve falošné mince v štvorici mincí D, E, F a G. Zoberieme ľubovoľné dve – napr. mince D a E – a porovnáme ich. Opäť máme dve možnosti, ako to dopadlo:

    1) **Váhy sú v rovnováhe.** Mince D a E sú teda buď obe pravé, alebo obe falošné. Položíme teda D a E na jednu stranu váh a na druhú dáme ostatné dve mince, F a G. Ľahšia strana váh potom obsahuje dve falošné mince. Znovu sme potrebovali tri váženia.
    2) **Jedna minca je ľahšia ako druhá.** Tá ľahšia je falošná, tá ťažšia je pravá. Porovnáme zvyšné dve mince, F a G. Ľahšia je falošná, ťažšia je pravá. Opäť sme potrebovali tri váženia. Aj pri druhej možnosti nám stačili tri váženia.

Pri tomto spôsobe nám teda vždy stačili tri váženia.

2. spôsob – na začiatok dáme dve mince na každú stranu váh (AB-CD). Môžu nastať dve možnosti:

1. **Váhy sú v rovnováhe** To znamená, že buď sú mince A a B aj C a D pravé, alebo je v oboch dvojiciach jedna pravá a jedna falošná minca. Aby sme to zistili, zoberieme mince A a B a porovnáme ich. Sú dve možnosti, ako to môže dopadnúť:

   1) **Váhy sú v rovnováhe.** To znamená , že mince A a B aj C a D boli pravé. Ostali nám teda mince E, F a G, z nich musia byť dve falošné. Porovnáme mince E a F. Ak sú rovnaké, sú falošné, inak je falošná tá ľahšia minca a minca G.
   2) **Jedna minca je ľahšia ako druhá.** Ľahšia minca je potom falošná, ťažšia pravá. Rovnako porovnáme aj C a D.

2. **Jedna strana je ľahšia ako druhá.** Na ťažšej strane sú určite dve pravé mince (rovnako ako v druhej možnosti v prvom spôsobe). Porovnáme mince z ľahšej strany. Znovu máme dve možnosti:

   1) **Váhy sú v rovnováhe.** Obe mince sú falošné. V tomto prípade nám teda stačili dokonca len dve váženia. To ale ešte neznamená, že nám budú stačiť vždy len dve váženia.
   2) **Jedna minca je ľahšia ako druhá.** Ľahšia minca je falošná, ťažšia pravá. Ostali nám tri mince E, F a G, z toho jedna falošná. Tú vieme nájsť na jedno váženie rovnako, ako sme to spravili v prvom spôsobe pre mince A, B a C či D, E, a F.

Teda aj pri tomto spôsobe nám vždy stačili tri váženia.

Dobre, tak sme si ukázali, že kvapkám stačili tri váženia. Teraz prichádza tá ťažšia časť úlohy, na ktorú mnohí z Vás zabudli alebo v nej mali chyby, a to dokázať, že na menej vážení to nejde. Opäť existuje viacero spôsobov. Jeden bol napríklad rozobrať všetky možné prípady prvého porovnávania (1 a 1 minca, 2 a 2 mince, 3 a 3 mince) a nájsť také rozloženie mincí, že nám určite nebudú stačiť dve váženia na to, aby sme určili, ktoré mince sú pravé a ktoré falošné. Tu si však bolo treba dať veľký pozor na to, aby sme na nič nezabudli. My si teraz ukážeme krajší dôkaz.

Z mincí ABCDEFG vieme vybrať dve falošné $(7 \cdot 6)/2=21$ spôsobmi. Prvú mincu vyberáme zo siedmich, druhú len zo šiestich. Takto sme však zarátali všetky možnosti dvakrát (ak sú falošné mince A a C, je to tá istá možnosť, ako že falošné sú mince C a A), preto ešte vydelíme dvomi. Ak teda vieme, ktoré z 21 rozložení mincí je naše súčasné, vieme povedať, ktoré mince sú falošné.

Pri každom vážení však vieme odlíšiť tri skupiny prípadov. Pravá strana je buď **ťažšia** ako ľavá, alebo **ľahšia** ako ľavá, alebo sú **váhy v rovnováhe**. Pritom každé z našich 21 rozložení patrí do jednej skupiny, a do každej skupiny patrí priemerne $21/3=7$ rozložení. Nepotrebujeme vedieť, koľko presne ich tam je, lebo ak ich priemerne je 7, tak v aspoň jednej skupine ich je aspoň 7 – rozmyslite si prečo ☺. Musíme vedieť rozloženie rozlíšiť aj v tejto skupine, preto sa ďalej pozerajme už len na ňu. Použili sme teda jedno váženie a už vieme, že naše rozloženie je prinajlepšom jedno zo 7 možných. Ale ďalšie váženie nám tých 7 rozložení opäť iba podelí do troch podskupín – podľa toho, či je pravá strana ľahšia, ťažšia alebo rovnako ťažká ako ľavá strana. Priemerne tak v jednej z podskupín po druhom vážení je $7/3 = 2\frac{1}{3}$ rozložení. Čiže trochu viac, ako 2 rozloženia. Ale potom musí existovať aspoň jedna podskupina, v ktorej sú aspoň dve rozloženia. A to je problém, pretože ak je naša súčasná situácia jedným z týchto dvoch (či viac) rozložení, nevieme ju jednoznačne rozlíšiť, a teda nevieme, ktoré mince sú falošné. Dve váženia nám preto nestačia vždy, potrebujeme ešte tretie. A ako sme ukázali, na tri váženia to ide pre ľubovoľné rozloženie.

Bodovanie:
za funkčný postup na 3 váženia – 3,5b.; za dôkaz, že ide o najmenší počet vážení – 1,5b.

Poznámka:
Ak ste mali funkčný postup na 4 váženia, mohli ste dostať dva body. Za funkčný postup na 5 vážení sa dal získať jeden bod. Ak ste mali riešenie na 6 vážení, mohli ste dostať nanajvýš pol boda. Za postupy na viac vážení sa body nedostávali.