Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

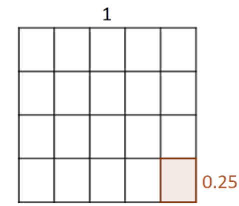
37. ročník www.pikomat.sk školský rok 2019/2020

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Úloha 1: Krájanie torty – *Opravovali Alex Chudíc a Tomáš Ganz*

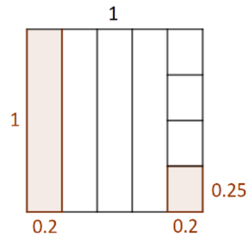
Na oslave bude 4 alebo 5 kvapiek, pre ktoré Potok pripravil štvorcovú tortu. Chce ju rozrezať niekoľkými rovnými rezmi na časti, ktoré nemusia byť rovnako veľké.
Nevie však, koľko presne kvapiek príde na oslavu. Musí preto tortu rozrezať tak, aby všetky kvapky dostali rovnaké množstvo torty, či už ich príde 4 alebo 5 (kvapky ale nemusia dostať rovnaké počty častí). Potok si z torty nedá. **Ako môže Potok rezať, ak:**
A) Chce tortu rozrezať na presne 20 častí?
B) Chce tortu rozrezať na presne 8 častí?

Pozrime sa najprv na prvú časť zadania. Pri rozrezaní na 20 častí si môžeme hneď uvedomiť, že 20 = 4·5, čiže môžeme tortu rozdeliť na **20 rovnakých** kúskov a budeme ju vedieť rovnomerne rozdeliť medzi kvapky, či už prídu štyri alebo ich príde päť. Na 20 kúskov si ich vieme rozdeliť napr. tak, ako na prvom obrázku.



Ak prídu 4 kvapky, každá dostane 5 kúskov.
Ak príde 5 kvapiek, každá dostane 4 kúsky.

A čo ak chce Potok rozrezať tortu na 8 kúskov? Keďže 8 nie je deliteľné 5, tak začneme tým, že si rozrežeme tortu na 5 rovnakých častí, aby sme tortu určite vedeli rozdeliť medzi päť kvapiek. Následne môžeme jednu z častí rozdeliť na štvrtiny, aby sme tortu vedeli rozdeliť aj medzi štyri kvapky. Potok teda môže rozrezať tortu napr. tak, ako na druhom obrázku.



Ak prídu štyri kvapky, každá dostane 1 väčší obdĺžnik a 1 menší.
Ak príde päť kvapiek, štyri z nich dostanú každá 1 väčší obdĺžniku a posledná dostane všetky 4 menšie obdĺžniky

Bodovanie:
za správne riešenie prvej časti – 1,5b.; za vysvetlenie riešenia prvej časti – 1b.; za správne riešenie druhej časti – 1,5b.; za vysvetlenie riešenia druhej časti – 1b.

Úloha 2: Pohľadnice – *Opravovali Juraj Jankovich a Natália Čigašová*

Kvapka dostala štyri pohľadnice:

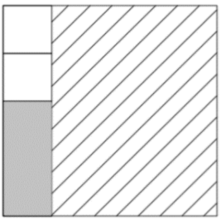
- Dve zelené, rovnako veľké pohľadnice, každú v tvare štvorca.
- Jednu červenú pohľadnicu v tvare obdĺžnika s rozmermi 10 cm × 24 cm.
- Jednu žltú pohľadnicu v tvare obdĺžnika.

Z pohľadníc sa pritom dal poskladať jeden veľký štvorec bez toho, aby sa pohľadnice ohýbali, prekrývali či niekde mali medzeru. **Aké rozmery mohla mať žltá pohľadnica? Nájdi aspoň päť *rôznych* riešení.**

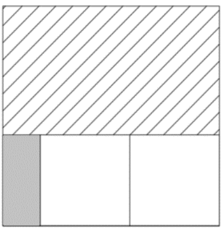
Máme štyri pohľadnice, ktoré chceme uložiť do jedného veľkého štvorca: červený obdĺžnik s rozmermi 10 cm × 24 cm, dva rovnaké zelené štvorce a jeden žltý obdĺžnik, ktorého rozmery nepoznáme. Na obrázkoch budeme červenú pohľadnicu reprezentovať sivo vyplneným obdĺžnikom a žltú pohľadnicu vyšrafovaným obdĺžnikom.

Rozmery žltej pohľadnice sa menia podľa toho, ako uložíme tieto pohľadnice do nášho štvorca a aké veľké budú rozmery zelených pohľadníc Po chvíli skúšania zistíme, že pohľadnice vieme umiestniť šiestimi rôznymi spôsobmi tak, aby spolu tvorili štvorec. Za rôzne umiestnenia pritom považujeme také, čo nevzniknú otočením ani zrkadlovým obrazom niektorého iného zobrazenia. Pritom za rovnaké umiestnenia budeme považovať aj tie, v ktorých má žltá pohľadnica rovnaké rozmery ako v nejakom inom.

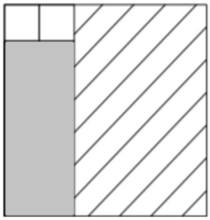
Uložme obe zelené štvorcové pohľadnice nad červenú pohľadnicu tak, aby všetky tri spolu tvorili obdĺžnik. Potom určite dokážeme pridaním žltého obdĺžnika vytvoriť štvorec, nakoľko rozmery žltej pohľadnice môžu byť ľubovoľné. Vtedy máme štyri rôzne rozloženia:



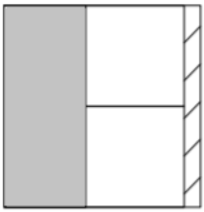
Vidíme, že strana zelenej štvorcovej pohľadnice je v tomto rozložení rovnako dlhá ako kratšia strana červenej pohľadnice, má teda dĺžku 10 cm. Červená a zelené pohľadnice teda spolu tvoria obdĺžnik s rozmermi 10 cm × (10+10+24) cm, čiže 10 cm × 44 cm. Žltá pohľadnica má s týmto obdĺžnikom spoločnú stranu dlhú 44 cm. Aby všetky pohľadnice spolu tvorili štvorec, musí druhá strana žltej pohľadnice mať dĺžku (44-10) cm, čiže 34 cm. Žltá pohľadnica tak bude mať rozmery **34 cm × 44 cm**. Uvedomme si, že ak vymeníme pozíciu červenej pohľadnice a ktorejkoľvek zelenej pohľadnice, dostaneme rozmiestnenie, v ktorom má žltá pohľadnica rovnaké rozmery, a teda ho nepovažujeme za rôzne.



Toto rozloženie je veľmi podobné ako predošlé. Opäť sa nám z červenej a zelených pohľadníc podarilo vytvoriť obdĺžnik, ktorý žltou pohľadnicou doplníme na štvorec. Vidíme, že strana zelenej štvorcovej pohľadnice je pritom rovnako dlhá ako dlhšia strana červenej pohľadnice, má teda dĺžku 24 cm. Červená a zelené pohľadnice teda spolu tvoria obdĺžnik s rozmermi 24 cm × (10+24+24) cm, čiže 24 cm × 58 cm. Žltá pohľadnica má s týmto obdĺžnikom spoločnú stranu dlhú 58 cm. Aby všetky pohľadnice spolu tvorili štvorec, musí druhá strana žltej pohľadnice mať dĺžku (58-24) cm, čiže 34 cm. Žltá pohľadnica tak bude mať rozmery **34 cm × 58 cm**. Opäť ak vymeníme pozíciu červenej pohľadnice a ktorejkoľvek zelenej pohľadnice, dostaneme rozmiestnenie, v ktorom má žltá pohľadnica rovnaké rozmery, a teda ho nepovažujeme za rôzne.

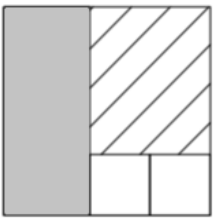


Ďalšou možnosťou, ako utvoriť z červenej a zelených pohľadníc jeden obdĺžnik, (ktorý potom hravo doplníme na štvorec druhým obdĺžnikom žltej farby) je priložiť obe zelené pohľadnice ku kratšej strane červenej pohľadnice. Potom má každá zelená pohľadnica stranu rovnako dlhú, ako je polovica dĺžky kratšej strany červenej pohľadnice – (10/2) cm = 5 cm. Červeno-zelený obdĺžnik má teda rozmery 10 cm a (24+5) cm, čiže 10 cm × 29 cm. Žltá pohľadnica s ním má spoločnú stranu dlhú 29 cm. Aby nám teda vznikol štvorec, jej druhá strana musí mať dĺžku (29-10) cm. Bude mať teda rozmery **19 cm × 29 cm**.

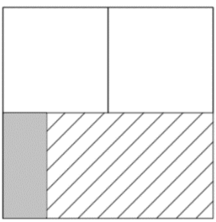


Táto situácia je veľmi podobná predošlej, ale zelené štvorcové pohľadnice tu budú mať stranu rovnakej dĺžky, ako je polovica dĺžky dlhšej strany červenej pohľadnice. Teda zelené pohľadnice budú mať strany dlhé (24/2) cm = 12 cm. Červeno-zelený obdĺžnik má teda rozmery 24 cm a (10+12) cm, teda 24 cm × 22 cm. Úzky žltý obdĺžnik má s červeno-zeleným spoločný rozmer 24 cm a jeho druhá strana bude mať dĺžku (24-22) cm, teda má rozmery **2 cm × 24 cm**.

Zdá sa, že sme vyčerpali možnosti, ako z červenej pohľadnice a dvoch zelených pohľadníc vytvoriť jeden obdĺžnik. Skúsme teda vytvoriť dva obdĺžniky a k nim pridať žltý obdĺžnik tak, aby nám vznikol štvorec. Po chvíli skúšania prídeme na to, že ak zelené pohľadnice nemajú spoločnú stranu, tak sa nám to nemôže podariť. Zvyšné dve možnosti teda vyzerajú takto:



V prvej možnosti sme priložili našu dvojicu zelených štvorcov k dlhšej strane červenej pohľadnice. Vidíme, že dlhšia strana červenej pohľadnice musí mať rovnakú dĺžku, ako je dvojnásobok dĺžky zelenej pohľadnice plus dĺžka kratšej strany červenej pohľadnice. Teda zelená pohľadnica má strany dlhé (24-10)/2 cm, teda 7 cm. Vidíme, že žltá pohľadnica má svoju kratšiu stranu rovnako dlhú, ako majú dokopy dve zelené pohľadnice, teda 2·7 cm, čiže 14 cm. Jej druhá strana musí dať spolu so stranou zelenej pohľadnice rovnakú dĺžku, ako má dlhšia strana červenej pohľadnice. Druhá strana žltej pohľadnice má teda dĺžku (24-7) cm. Žltá pohľadnica má potom rozmery **14 cm × 17 cm**.



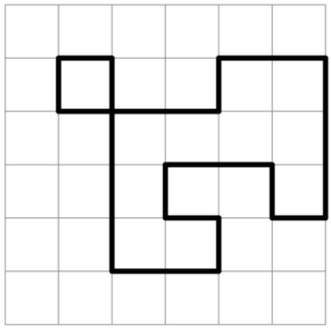
V druhej možnosti priložíme dvojicu zelených štvorcov ku kratšej strane červenej pohľadnice. Zjavne dvojnásobok dĺžky strany zelenej pohľadnice je rovný súčtu dĺžok strany zeleného štvorca a dlhšej strany červeného obdĺžnika. Teda strana zelenej pohľadnice má rovnakú dĺžku ako dlhšia strana červenej pohľadnice, teda 24 cm. Žltá pohľadnica má teda jeden rozmer tiež 24 cm (lebo susedí s dlhšou stranou červenej pohľadnice). Druhý rozmer má v súčte s dĺžkou kratšej strany červenej pohľadnice veľkosť 2·24 cm, teda druhý rozmer žltej pohľadnice je (48-10) cm. Žltá pohľadnica má tak rozmery **24 cm × 38 cm**.

Máme teda týchto šesť možností pre rozmery žltej pohľadnice: **34 cm × 44 cm**, **34 cm × 58 cm**, **19 cm × 29 cm**, **2 cm × 24 cm**, **14 cm × 17 cm** a **24 cm × 38 cm**.

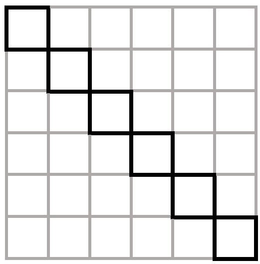
Bodovanie:
za 5 správnych možností, aké môžu byť rozmery žltej pohľadnice – 5×0,5b.; za postup zostavenia štvorca z pohľadníc – 1,5b.; za správny výpočet rozmerov žltej pohľadnice – 1b.

Úloha 3: Výbeh – *Opravovali Jakub Pravda, Marianna Hronská, Peter „Bubu" Onduš a Samuel Vaško*

Výbeh pre kravičky mal podobu štvorčekovej mriežky 6 × 6 políčok, kde každé políčko malo rozmery 1 × 1 m. Sárin otecko chcel na oplotenie niekoľkých políčok použiť presne 24 m pletiva. Pletivo bolo z jedného kusu – otecko ho nechcel strihať. Pritom ho mohol umiestňovať len po hraniciach políčok. Taktiež nemohlo byť nikde dvojmo, mohlo sa však dotýkať samo seba v rohu (napríklad ako na obrázku). **Aké *rôzne* počty políčok mohol otecko oplotiť? Nezabudni vysvetliť, ako by vyzerali ohrádky pre tieto počty políčok.**

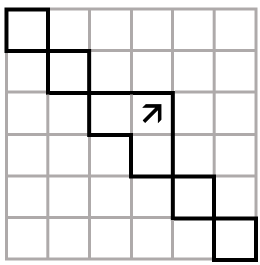


Hneď na začiatok by bolo dobré určiť, koľko minimálne a koľko maximálne políčok môže ohrada (výbeh) obsahovať. 1 Políčko môžeme ohradiť maximálne 4 kusmi plota(keďže zo zadania vieme, že sa ploty nesmú prekrývať) a teda ak chceme spotrebovať čo najviac kusov plota na čo najmenej políčok, chceme ideálne každé políčko v našom výbehu ohradené zo všetkých 4 strán. Keďže máme 24 kusov plota, 24÷4 = 6, teda vidíme, že v ideálnom prípade vieme ohradiť minimálne 6 políčok. Takúto minimálnu ohradu vieme vytvoriť napríklad tak, že ohradíme všetky políčka na diagonále.



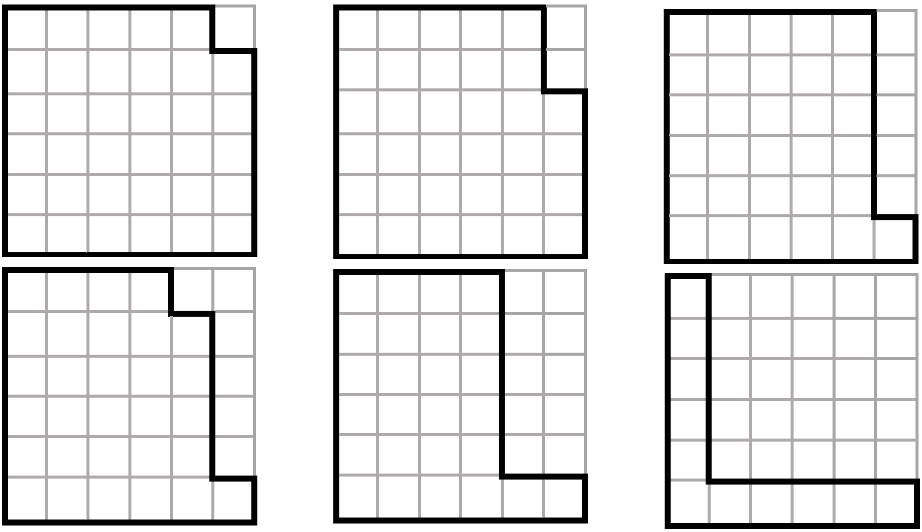
Maximum, ktoré môžeme ohradiť je zrejme celé pole = 36 políčok, keďže jedna strana poľa je zložená zo 6 strán malých políčok a teda obvod celého poľa je 4×6 = 24, čo je presne toľko kusov plota, koľko potrebujeme minúť.

Máme teda zadefinovaný najmenší a najväčší možný výbeh. Teraz ste si mnohí všimli, že je za istých podmienok možné pridávať/odoberať políčka v ohrade presunutím 2 častí plota tak, aby sa obvod nezmenil, tak, ako je to na obrázku.

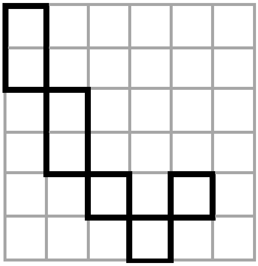
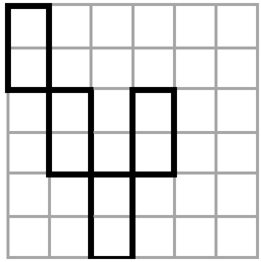
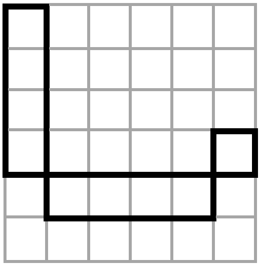
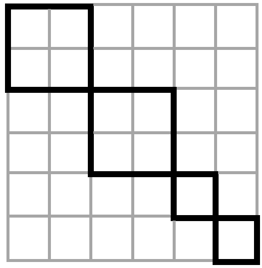


Z toho ste mnohí nadobudli správny dojem, že je možné vytvoriť všetky výbehy s obsahom 6 až 36 vrátane. Toto tvrdenie je však dôležité dokázať a to buď tak, že nakreslíte ako by každý z výbehov vyzeral, alebo nájdete systém, ako ohrady pre všetky obsahy v rozsahu 6-36 vrátane zaručene vytvoriť. V tomto momente sa takmer všetky Vaše riešenia začali líšiť a mnohí ste prišli so zaujímavými a správnymi systémami ako jednotlivé výbehy vytvoriť. Jeden zo spôsobov je, že postupne po jednom vysúvate políčka z diagonály tak ako na poslednom obrázku a postupne tak po jednom políčku zaplníte najprv diagonály štvorcov 5×5, susediace s našou diagonálou, potom diagonály štvorcov 4×4 susediace s diagonálami štvorca 5×5 a tak ďalej až kým vám zostanú iba prázdne 2 rohy, ktoré zaplníte na záver a tým zaplníte celú tabuľku 6×6.

Ďalší spôsob, ktorý sa mi pre jeho jednoduchosť a prehľadnosť páči je taký, že začíname zo zaplnenej tabuľky a postupne odoberáme po políčku nasledovným spôsobom:



Vidíme, že takýmto spôsobom vieme systematicky vytvoriť všetky výbehy v rozsahu 11-36 vrátane. Ostáva ukázať, ako budú vyzerať výbehy obsahujúce 7, 8, 9 a 10 políčok, pričom výbeh so 6 políčkami dostaneme, ak ohradíme všetky políčka na diagonále. To ste mohli ukázať jednoducho vysúvaním políčok zo začiatočnej obsadenej diagonály, alebo ste mohli vymyslieť čokoľvek kreatívne, napríklad takúto kombináciu výbehov:

Spôsobov ako túto úlohu vyriešiť bolo veľa, no výsledok je jednoznačný a teda, že je možné vytvoriť 31 rôznych ohrád so všetkými počtami políčok v rozsahu 6 až 36 vrátane.

Bodovanie:

za správny výsledok – 2b.; za nájdenie najväčšieho a najmenšieho počtu políčok – 2×1b.; za ukázanie, ako by jednotlivé výbehy vyzerali/ako by sa vytvorili – 1b.

Úloha 4: Kravičky – *Opravoval Peter „Bubu“ Onduš*

V ohrádke bolo niekoľko kravičiek, ktoré boli očíslované prirodzenými číslami od jedna až po počet kravičiek. Napríklad ak by v ohrádke bolo 5 kravičiek, boli by očíslované 1, 2, 3, 4, 5. Sára ich chcela usporiadať do radu tak, aby každá dvojica susediacich kravičiek spĺňala obe tieto podmienky:

- Jedna z nich mala párne číslo a druhá nepárne.
- Rozdiel ich čísel bol väčší ako jedna.

5 6 7 P S: Pre ktoré počty kravičiek od 1 do 10 sa to dá? Prečo pre ostatné nie?

8 9 T K: Pre ktoré počty kravičiek sa to dá? Prečo pre ostatné nie?

Našou úlohou je zistiť, pre ktoré počty kravičiek – pre kategórie 5, 6, 7, Príma a Sekunda len pre počty od 1 do 10 – sa dajú kravičky postaviť do radu tak, aby spĺňal podmienky zo zadania:

1. V každej susediacej dvojici kravičiek má jedna kravička párne číslo a druhá nepárne.
2. V každej susediacej dvojici kravičiek je rozdiel čísel kravičiek väčší ako jedna.

Obe tieto podmienky sa majú vzťahovať na každý pár susediacich kravičiek v rade. Ak teda máme len jednu kravičku, nemáme žiadne páry. Teda neexistuje žiadny pár, ktorý by porušoval podmienky, a teda podmienky sú splnené. Pre vyššie počty kravičiek máme v ohrádke vždy kravičku s číslom 2. Zamyslime sa, aké najmenšie môže byť číslo kravičky, s ktorou môže susediť. Podľa druhej podmienky nemôže susediť s kravičkami s číslom 1 ani s číslom 3. Podľa prvej podmienky však nemôže susediť ani s kravičkou s číslom 4. Teda najmenšie číslo, ktoré môže susediť s kravičkou číslo 2 je číslo 5. Z toho vyplýva, že pre počty kravičiek 2 až 4 sa rad poskladať podľa pravidiel nedá, lebo kravička s číslom 2 by nemohla susediť so žiadnou inou tak, aby boli splnené podmienky zadania.

Podobným spôsobom je kravička s číslom 3 musí susediť s kravičkou s číslom najmenej 6 – s kravičkami s číslami 1 a 5 nemôže susediť kvôli prvej podmienke a s kravičkami s číslami 2 a 4 kvôli druhej podmienke. **Preto sa pre 5 kravičiek v ohrádke nedá poskladať rad spĺňajúci podmienky zadania.** Pozrime sa teda na situáciu so 6 kravičkami. Vieme, že kravička s číslom 2 musí susediť s kravičkou s číslom 5, pretože nemôže susediť so žiadnou inou. No kravička s číslom 5 tiež nemôže susediť so žiadnou inou kravičkou ako s kravičkou s číslom 2. Obe teda musia byť na pozíciách, ktoré susedia iba s jednou kravičkou – teda na krajoch radu. No ak ich dáme na opačné kraje, nebudú so sebou susediť a teda sa **rad so 6 kravičkami poskladať nedá**.

Pozrime sa teraz na situáciu so 7 kravičkami. Po krátkom skúšaní nájdeme rad, ktorý spĺňa podmienky: 5 2 7 4 1 6 3

Podobne vieme poukladať aj 8 kravičiek (1 6 3 8 5 2 7 4), 9 kravičiek (1 6 3 8 5 2 7 4 9) a 10 kravičiek (1 8 3 10 5 2 7 4 9 6).

Pozrime sa teraz na počty kravičiek väčšie ako 10. Vyzerá to tak, že sa pre ne budú dať vytvoriť rady podľa pravidiel. Aby sme to dokázali, musíme vymyslieť nejaký spôsob ako poukladať kravičky do radu tak aby spĺňali podmienky pre ľubovoľný počet kravičiek.

Z prvého pravidla vyplýva, že sa párne a nepárne čísla musia striedať. Začnime nepárnymi číslami, ktoré poukladáme po poradí, s medzerami medzi nimi, kam môžeme uložiť párne čísla:

1 _ 3 _ 5 _ ...

Párne čísla poukladáme pomedzi nepárne čísla tiež po poradí, ale najväčšie párne číslo (označme ho A) a druhé najväčšie párne číslo (označme ho B) dáme hneď na začiatok:

_ B _ A _ 2 _ 4 _ ...

Dokopy to teda je:

1 B 3 A 5 2 7 4 ...

Rovnakým spôsobom vznikli aj rady, ktoré uvádzame ako príklady pre 8, 9 a 10 kravičiek.

Vidíme, že párne čísla napravo od 5 (2, 4, 6,...) majú vždy naľavo číslo väčšie o 3 a napravo číslo väčšie o 5. Teda obe podmienky sú splnené pre každú dvojicu napravo od čísla 5.

Zostáva nám teda časť radu 1 B 3 A 5. Ak je počet kravičiek väčší ako 7, najväčšie párne číslo A je aspoň 8, a teda určite môže susediť s 3 a 5, a podobne druhé najväčšie párne číslo B je aspoň 6, takže môže určite susediť s číslami 1 a 3.

Všetky dvojice susediacich kravičiek v rade teda spĺňajú obe podmienky pre všetky počty kravičiek väčšie ako 8.

Kravičky teda do radu nevieme postaviť iba ak je ich počet 2, 3, 4, 5, alebo 6.

Bodovanie:
5 6 7 P S: za odôvodnenie, či sa rad dá vytvoriť pre každý počet kravičiek od 1 do 10 – 10×0,5b.
8 9 T K: za odôvodnenie, prečo sa rad nedá vytvoriť pre každý počet kravičiek od 2 do 6 – 5×0,5b.; za platnú konštrukciu pre ľubovoľne dlhý rad aspoň s aspoň 7 kravičkami – 1b.; za odôvodnenie platnosti konštrukcie – 1,5b.

Poznámka:
Ak ste v situácií s 1 kravičkou uvažovali, že podmienky nie sú splnené, lebo rad neobsahuje žiadne dvojice, body som nestrhával.

Úloha 5: Tancovačka – *Opravoval Pavol „Tamara" Hronský*

Raz za rok sa na pláži koná tradičná tancovačka. Na tancovačku chodia páry chlapec-dievča. Zväčša sa však nevedia dohodnúť na pároch, výber párov preto prebieha špeciálnym spôsobom – v kolách.
V prvom kole všetci chlapci aj dievčatá zavrú oči a náhodne sa pohybujú po miestnosti, až kým si každý nenájde dvojicu. Potom naraz otvoria oči. Ak sa spárovali chlapec s dievčaťom, odchádzajú spolu na tancovačku. Ak sa dali do páru dvaja chlapci alebo dve dievčatá, hodia si mincou a porazený odchádza domov (nepôjde na tancovačku), zatiaľ čo víťaz pokračuje v ďalšom kole. Ak bol v miestnosti nepárny počet ľudí, tak človek, ktorému sa neušiel pár, čaká a pokračuje v ďalšom kole s ostatnými.
Takéto kolá sa opakujú vždy s tými, čo ostali z minulého kola, až kým všetci neodídu z miestnosti. Ak na úplnom konci zvýši jeden človek, je tiež vylúčený.
Tento rok na tancovačku chcelo ísť 37 chlapcov a 21 dievčat. **Koľko *najmenej* párov sa určite dostalo na tancovačku? Nezabudni zdôvodniť, prečo to nemohlo byť menej.**

Na úvod je dôležité pochopiť, čo je vlastne podstatou úlohy. *„Koľko najmenej párov sa určite dostalo na tancovačku?"* To znamená, že chceme nájsť najmenší možný počet párov, ktorý sa nutne dostane na tancovačku, aj keby vytváranie párov bolo najnepriaznivejšie pre všetkých zúčastnených. Čo to teda znamená? Skúsime úlohu riešiť tak, aby v každom kole vznikol čo najmenší počet zmiešaných párov.

Na začiatku máme 37 chlapcov a 21 dievčat. Aby nám vznikol čo najmenší počet zmiešaných párov, budeme tvoriť páry rovnakého pohlavia až dokiaľ sa bude dať. V prvom kole nám teda vznikne 18 čisto chlapčenských párov, 10 čisto dievčenských párov a nutne **1 zmiešaný pár**, keďže chlapcov aj dievčat je nepárny počet.

Do druhého kola po hádzaní mincou teda postúpi 18 chlapcov a 10 dievčat. Keďže aj chlapcov aj dievčat je párny počet, vieme vytvoriť 9 čisto chlapčenských, 5 čisto dievčenských a **0 zmiešaných párov**.

Následne v treťom kole máme podobnú situáciu ako v prvom kole, t. j. nepárny počet chlapcov aj dievčat. Vytvoríme teda 4 čisto chlapčenské, 2 čisto dievčenské a **1 zmiešaný pár**. Štvrté kolo prebehne rovnako ako druhé. Dostaneme 2 čisto chlapčenské, 1 čisto dievčenský a **0 zmiešaných párov**.

V piatom kole nám ostávajú už len dvaja chlapci a jedno dievča. Aby sme postupoval rovnako ako doteraz, vytvorím 1 čisto chlapčenský, 0 čisto dievčenských a 0 zmiešaných párov. Niektorí z Vás si nepozorne prečítali zadanie, kde sa píše: *„Ak bol v miestnosti nepárny počet ľudí, tak človek, ktorému sa neušiel pár, čaká a pokračuje v ďalšom kole s ostatnými...”* a vyradili dievča, ktoré ostalo samo. Toto dievča ale malo pokračovať v ďalšom kole.

Takto nám do posledného šiesteho kola ostali jeden chlapec a jedno dievča, ktorí spolu vytvorili **1 zmiešaný pár**. Preto môžeme konštatovať, že na tancovačku sa museli dostať minimálne **3 chlapčensko-dievčenské páry**.

Väčšina z Vás v tomto momente skončila s riešením a považovala ho za „dokázané”. Lenže dôkaz nespočíva v tom, že ukážeme jeden spôsob ako sa dostať k nejakému výsledku. Musíme aj ukázať, že k lepšiemu výsledku sa dostať inak nevieme. Pýtame sa teda, dá sa párovanie spraviť inak – tak aby na tancovačku išli 2 alebo menej párov?

Začnime od 0. Nula párov nevieme dostať v nijakom možnom prípade, pretože hneď v prvom kole nám vznikne jeden zmiešaný pár. Vieme to teda urobiť na 1 zmiešaný pár? Ako sme si povedali, tento pár nutne vznikne hneď v prvom kole. Vieme pokračovať tak, aby v žiadnom z nasledujúcich kôl už iný pár nevznikol? Nevieme, pretože síce nám v druhom kole žiadny zmiešaný pár nevznikne, ale v treťom máme rovnakú situáciu ako v prvom kole (nepárny počet chlapcov aj dievčat) a teda nutne vznikne ďalší pár.

Ostáva nám už len situácia, či by sa to nedalo urobiť na 2 zmiešané páry. Priamočiarym postupom sa nám to ukázať neporadilo (dostali sme 3 zmiešané páry na konci). Takže poďme skúsiť vytvoriť niekde umelý zmiešaný pár. Myšlienka je, že tento pár nám v konečnom dôsledku pomôže znížiť celkový počet zmiešaných párov na konci.

Ak by som vytvoril 2 zmiešané páry hneď na začiatku prvého kola, ostalo by mi na párovanie 35 chlapcov a 19 dievčat. No tí by nutne vyrobili ešte jeden zmiešaný pár navyše a to už by boli 3. Čiže v prvom kole vytvorme iba jeden zmiešaný pár. Čo ak by sme vytvorili umelý zmiešaný pár v druhom kole? Opäť raz by sme museli vytvoriť aspoň 2 páry, keďže máme k dispozícii 18 chlapcov a 10 dievčat, čo sú párne počty. To by už dokopy dalo 3 páry a teda nemusíme pokračovať. Je teda jasné, že v druhom kole nevznikne žiaden zmiešaný pár. V treťom nám vznikne aspoň jeden. Ak by sme chceli viac, museli by vzniknúť aspoň tri (po vzore z prvého kola), čo by už dokopy dalo 4 páry a teda nepokračujeme. No a keďže už máme po treťom kole 2 zmiešané páry, už nesmieme vytvoriť žiaden v nasledujúcich kolách. Lenže ako sme si už ukázali v priamočiarom riešení, jeden pár nám ešte nutne vznikne v poslednom kole nech robíme, čo robíme. A teda sme ukázali, že naozaj **na menej ako 3 zmiešané páry sa úloha vyriešiť nedá**.

Bodovanie:
za správnu odpoveď – 1b.; za správny postup aj s náležitým okomentovaním – 2,5b.; za dôkaz, prečo sa to nedá urobiť na menej párov – 1,5b.

Úloha 6: Záhrada – *Opravovali Jakub Poljovka, Martin Kliment a Samuel Vaško*
Sárin otecko mal záhradu veľkosti 201 × 201 políčok. Jeho domček stál na prostrednom políčku. Na každom zo zvyšných políčok bol zasadený jeden melón. Otecko vedel odtrhnúť len ten melón, na ktorého políčku práve stál. Prechádzať medzi políčkami vedel otecko len tak, že spravil krok cez ich spoločnú hranicu (nie cez roh). Otecko však naraz uniesol len jeden melón, takže zakaždým, keď niektorý odtrhol, sa musel vrátiť do domčeka a odložiť ho tam. **Koľko najmenej krokov cez hranicu políčok musel otecko urobiť, ak začínal v domčeku a chcel vyzbierať všetky melóny?**

Pozrime sa najprv, ako by vyzeralo riešenie v menšej záhrade, napríklad 9×9 políčok. Takúto záhradu si ľahko zvládneme nakresliť a do jednotlivých políčok si zapíšeme ich vzdialenosť od domčeka, teda počet krokov potrebných na dostane sa z domčeka na toto políčko. Môžeme si všimnúť, že záhrada sa dá rozdeliť na štyri časti, na ktorých máme napísané rovnaké čísla. Toto bude platiť bez ohľadu na veľkosť záhrady, teda aj pre záhradu 101×101 políčok. Bude nám preto stačiť vypočítať počet krokov, ktoré spraví Sárin otecko v jednej z týchto častí a potom ho už len vynásobíme štyrmi. Zostáva nám teda otázka, ako vypočítame počet krokov v jednej časti. Odpoveď je jednoduchá - sčítame čísla napísané na jednotlivých políčkach a tento súčet vynásobíme dvoma, keďže Sárin otecko musí absolvovať dve cesty - jednu k melónu a druhú späť do domčeka.

8	7	6	5	4	5	6	7	8
7	6	5	4	3	4	5	6	7
6	5	4	3	2	3	4	5	6
5	4	3	2	1	2	3	4	5
4	3	2	1	0	1	2	3	4
5	4	3	2	1	2	3	4	5
6	5	4	3	2	3	4	5	6
7	6	5	4	3	4	5	6	7
8	7	6	5	4	5	6	7	8

Keďže nám stačí sčítať čísla v ktorejkoľvek z našich štyroch častí, vyberme si ľavú hornú. Poďme ju sčítavať postupne po riadkoch. Súčet spodného riadku je (1+2+3+...+100+101), riadok nad ním má súčet (2+3+4+...+101+102), tretí riadok má súčet (3+4+5+...+102+103) a tak ďalej, až vrchný, stý riadok má súčet (100+101+102+...+199+200).

Máme tu veľa súčtov po sebe idúcich čísel, preto by sa nám zišlo vedieť ich efektívne sčítať. Začnime so súčtom (1+2+3+...+100+101). Napíšme si ho dvakrát pod seba, v opačnom poradí.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 99 & + & 100 & + & 101 \\ 101 & + & 100 & + & 99 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Takto napísané súčty sčítajme. Môžeme si všimnúť, že každé dve čísla, ktoré máme napísané pod sebou, majú súčet 102. Takýchto dvojíc máme 101, preto celkový súčet bude 102·101. Ešte treba myslieť na to, že teraz máme hľadaný súčet započítaný dvakrát, preto musíme náš výsledok vydeliť dvomi, čím dostávame 102·101/2=51·101=5151.

Paráda, máme za sebou spodný riadok našej časti, ale ako sa teraz popasujeme s tými ostatnými? Jednoducho, stačí nám všimnúť si, že každé číslo v druhom riadku je o 1 väčšie, ako číslo nachádzajúce sa pod ním. Keďže všetkých čísel v riadku je 101, tak celý súčet sa nám navýši o 1·101=101. V treťom riadku máme zase každé číslo o 1 väčšie ako číslo pod ním (v druhom riadku), čiže súčet tretieho riadku je o 101 väčší ako súčet druhého riadku, teda o 2·101=202 väčší ako súčet prvého riadku. Podobne to funguje pre každý ďalší riadok, čiže najvyšší riadok bude mať súčet o 101 vyšší ako druhý najvyšší riadok, teda o 99·101=9999 vyšší ako prvý riadok.

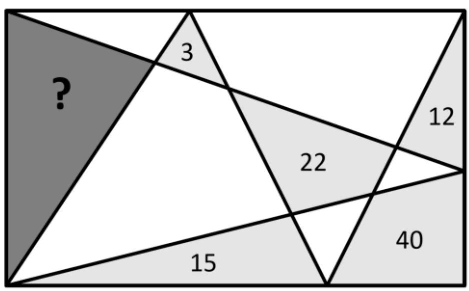
Teraz potrebujeme sčítať všetky naše riadky dokopy, čiže:
5151 + (5151 + 101) + (5151 + 2·101) + ... + (5151 + 99·101) = 5151·100 + 101·(1+2+...+99).

V zátvorke máme zase súčet po sebe idúcich čísel, ktorý sme sa už naučili počítať, takže vieme, že to bude 100·99/2=50·99=4950, čiže náš súčet sa bude rovnať 5151·100+101·4950=515100+499950=1015050.

Už sa blížime k výsledku, potrebujeme náš medzivýsledok ešte vynásobiť dvomi (aby sme započítali aj cestu naspäť) a potom ešte štyrmi (aby sme započítali všetky štyri časti). Takto sa dostaneme k číslu, tadáááá, 8120400. To je naším finálnym výsledkom, teda počtom krokov, ktoré musel urobiť Sárin otecko, aby pozbieral všetky melóny a odniesol ich do domčeka.

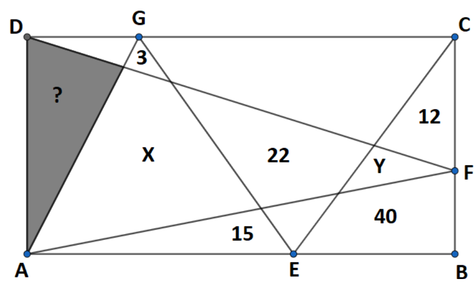
Bodovanie:
za rozdelenie záhrady na 4 časti – 0,5b.; za určenie počtu krokov potrebných na presun na každé políčko – 1b.; za spočítanie krokov potrebných na navštívenie všetkých políčok v každom riadku – 2,5b.; za započítanie aj cesty naspäť do domčeka – 1b.

Úloha 7: Kukurica – *Opravovali Jakub Poljovka, Sara Gašparová a Anamaria Šutková*



Pole malo tvar obdĺžnika, ktorý bol úsečkami rozdelený na niekoľko častí. Sára poznala obsahy niektorých častí, na ktorých bola vysadená kukurica. Tie sú na obrázku vyznačené svetlošedou farbou a každá časť má vnútri napísaný svoj obsah. Obsah jednej časti, ktorá je na obrázku vyznačená tmavošedou farbou a má vnútri napísaný otáznik, však Sára nevedela. **Aký bol obsah vyznačenej časti poľa, ktorý Sára nevedela?**

Označme si všetky dôležité body nášho poľa tak, ako na obrázku. Tiež označme obsahy dvoch z neznámych častí poľa ako X a Y.



Obsah obdĺžnika **ABCD** vieme vyjadriť ako:

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot |AB|.$$

Všimnime si, že obsah trojuholníka **AFD** je polovičný oproti obsahu obdĺžnika **ABCD.** Podľa vzorca na výpočet obsahu trojuholníka vieme totiž tento obsah vyjadriť nasledovne:

$$S_{AFD} = \frac{|AD| \cdot |AB|}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2},$$

kde **|AD|** je dĺžka jeho základne a **|AB|** je dĺžka jeho výšky.

Rovnako si ukážeme, že keď sčítame obsahy trojuholníkov **AEG** a **EBC**, dostaneme obsah, ktorý je tiež rovný polovici obsahu obdĺžnika **ABCD**. Všimnime si, že strany **AE** a **EB** týchto trojuholníkov spolu tvoria úsečku **AB**, čiže stranu obdĺžnika. Výška na tieto strany má rovnakú veľkosť, ako **AD**, teda druhá strana obdĺžnika. Vieme, že obsahy trojuholníkov vypočítame ako **polovicu dĺžky základne krát dĺžka výšky na základňu**. Keďže základne **AE** a **EB** spolu tvoria stranu obdĺžnika **AB**, súčet obsahov trojuholníkov **AEG** a **EBC** bude **polovicou dĺžky AB krát výška AD**, čo je polovica obsahu obdĺžnika **ABCD**. Matematickejšie zapísané, vieme, že

$$S_{AEG} + S_{EBC} = \frac{|AE| \cdot |AD|}{2} + \frac{|EB| \cdot |AD|}{2}.$$

Všimnime si, že tento vzorec vieme ďalej upraviť vyňatím **|AD|** pred zlomok nasledovne:

$$\ldots = |AD| \cdot \frac{|AE| + |EB|}{2} = |AD| \cdot \frac{|AB|}{2} = \frac{|AD| \cdot |AB|}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

Teraz si môžeme všimnúť, že trojuholníky **AEG** a **EBC** majú dokopy rovnaký obsah ako trojuholník **AFD**.

Už nám len stačí si obsahy týchto trojuholníkov vyjadriť ako súčty obsahov jednotlivých oblastí :

$$S_{AFD} = ? + X + 22 + Y$$
$$S_{AEG} + S_{EBC} = (15 + X + 3) + (40 + Y + 12)$$

Riešime teda rovnicu:

$$S_{AFD} = S_{AEG} + S_{EBC}$$
$$? + X + 22 + Y = 15 + X + 3 + 40 + Y + 12$$
$$? + X + Y + 22 = X + Y + 70$$
$$? = \mathbf{48}$$

Bodovanie:

za zistenie, že trojuholník AFD má obsah rovný jednej polovici obsahu obdĺžnika ABCD – 1,5b.; za zistenie, že trojuholníky AEG a EBC majú dokopy obsah rovný jednej polovici obsahu obdĺžnika ABCD – 1,5b.; za využitie tohto poznatku – 1,5b.; za správny výsledok – 0,5b.