Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

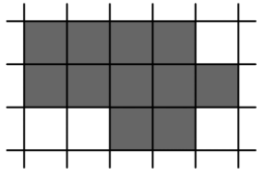
PIKOMAT

37. ročník www.pikomat.sk školský rok 2019/2020

Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Úloha 1: Prestavba – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Suterén správcov sa kedysi skladal z 11 štvorcových blokov, ako na obrázku. Každý blok mal obvod 20 kilometrov. Aby sa človek dostal dnu, musel Suterén správcov najprv celý obísť. **Aký bol kedysi obvod Suterénu správcov?**



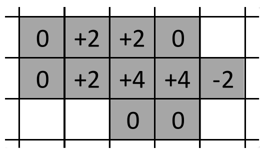
Neskôr sa pri renovácii rozhodli dva bloky suterénu zbúrať. Suterén pritom však zostal súvislý, čiže jeho bloky boli pospájané stenami (nie len rohmi). **Ktoré dva bloky (štvorčeky) suterénu treba odstrániť, aby mal výsledný Suterén správcov (útvar) čo najväčší obvod? Nájdi aspoň jedno riešenie.**

Prvá otázka – **aký bol kedysi obvod** (t.j. aký je obvod útvaru na obrázku): Keďže sa tento obvod skladá z veľa rovnakých strán štvorčekov, tak len spočítame tieto strany, a vynásobíme dĺžkou jednej strany. Strán štvorčeka po obvode útvaru je 16. Teraz zistíme ich dĺžku. Keďže každý blok je štvorec (teda má všetky 4 strany rovnako dlhé), a má obvod 20 km, tak jedna strana má 5 km. Celkový obvod je teda $16 \cdot 5\ km = \mathbf{80\ km}$.

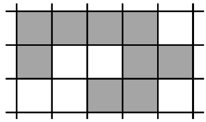
Druhá otázka – **ktoré dva bloky odstrániť, aby mal výsledný útvar čo najväčší obvod?** Pozrime sa, ako sa výsledný obvod (vyjadrený zatiaľ počtom strán, nie kilometrov) mení podľa toho, aký blok odstránime. Ukážeme si to v tabuľke – v prvom stĺpci bude, koľkými stranami sa blok dotýka iných blokov. V druhom stĺpci bude, koľko strán má „voľných“ – t.j. nedotýkajú sa ničoho, a teda sú započítané v obvode. V treťom stĺpci bude, ako sa zmení obvod, keď tento blok odstránime – teda strany, ktoré boli „voľné“, sa odčítajú, a naopak, keď odstránime stranu, čo sa dotýkala iného bloku, tak zrazu tomu druhému bloku ostane táto strana voľná, a teda sa pripočíta do obvodu. Napríklad blok úplne vpravo má 3 voľné strany a jednou sa dotýka, takže ak by sme ho odstránili, obvod by sa zmenil o -2.

D	V	Z
0	4	-4
1	3	-2
2	2	0
3	1	+2
4	0	+4

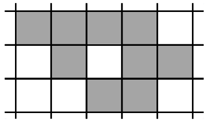
Teraz si môžeme napísať ku každému políčku, ako by sa zmenil obvod, kebyže ho odstránime (samozrejme, to ste mohli spraviť aj bez toho, aby ste si to zovšeobecnili tak ako ja vyššie).



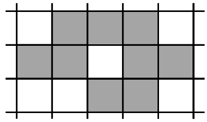
Ak odstránime dva bloky, ktoré spolu susedia, tak výsledný obvod sa nezmení o súčet tých dvoch čísel, ale o o dva menej. Lebo tú stranu, ktorú majú spoločnú, nepridáme dvakrát do obvodu, práve naopak, nepridáme ju ani raz, ako by tam ani nebola. Napr. keby sme odstránili tie dva stredné bloky (každý za +4), tak keď ich odstránime naraz, tak nám to pridá len +6, lebo sme vlastne odstránili obdĺžniček 2×1.



Dosť bolo kecov, poďme konečne niečo odstrániť. Logické by bolo odstrániť bloky, ktoré nám pridajú čo najviac. Ak odstránime **dve +4**, alebo ľubovoľné **+4 a +2 čo sa nedotýkajú**, útvar sa rozpadne (všimnime si, že odstrániť blok +4 vpravo nemôžme bez toho, aby sme neodstránili aj blok úplne vpravo). Teda súčty +8 ani +6 nevieme získať. Skúsme +4. To dostaneme ako **dve +2, čo sa nedotýkajú** (nedá sa, rozpadlo by sa to), alebo **+4 +0, čo sa nedotýkajú,** alebo **+4 +2, čo sa dotýkajú.**



To máme 6 možností, ale len tieto 3 tri z nich sú celistvé, každá z nich s obvodom 20 strán, teda 100 kilometrov.



Bodovanie:

za odpoveď 80 km – 1b.; za vysvetlenie, že jedna strana je dlhá 5 km, a strán je 16 – 1b.; za aspoň jednu z troch možností s obvodom 100 km – 1b.; za vysvetlenie, ako ste na ňu prišli, resp. prečo sa viac nedá – 2b.

Toto vzorové riešenie hovorí viac, ako stačilo na zisk 5b, vám stačilo pár myšlienok – tie v rohoch pridávajú 0; tá úplne vpravo sa neoplatí; treba brať z tých ostatných; tá +4 vpravo sa dá; len ak zoberieme aj tú úplne vpravo... Teda aj keď stačilo nájsť jednu možnosť s tým obvodom, stále treba vysvetliť, prečo si myslíte, že to je najviac, ako sa dá.

Poznámka:

Všimnite si, že všetky čísla v stĺpci Zmena našej prvej tabuľky sú párne. Keďže na začiatku je obvod párny, a aj zmeny vedia byť len párne, tak nikdy nevieme dostať útvar s nepárnym obvodom. To preto, že ak sme na štvorčekovej sieti, a pohybujeme sa len po stranách štvorčekov, a chceme spraviť uzavretý útvar (t.j. nakresliť obvod tak, že kde začnem, tam aj skončím), tak musí platiť, že: koľkokrát spravím čiarku doprava, toľkokrát musím spraviť aj čiarku doľava, aby som sa vrátil naspäť. Čiže počet vodorovných čiar je párny. A koľkokrát spravím hore, toľkokrát musím aj dole. Aj počet zvislých čiar je párny. Toto ste samozrejme nemuseli písať vo svojom riešení.

Úloha 2: Záležitosti pýchy – *Opravovali Karolína Pisoňová a Michaela Rusnáková*

Továreň má 30 rôznych kariérnych stupňov: Každý začne na prvom stupni (brigádnik) a postupnosťou povýšení sa môže vypracovať až na tridsiaty stupeň (exekutívny manažér). Ak by niekto mal byť povýšený nad 30. stupeň, vráti sa na spodok a pokračuje od 1. stupňa. Čiže napríklad ak je niekto z 29. stupňa povýšený o 4 stupne, skončí na 3. stupni.

Mužíci sa hádali o štyroch zamestnancoch: Štvrtko, Piatko, Šestko a Sedma, ktorí začali postupne na štvrtom, piatom, šiestom a siedmom stupni.

Potom ich mužíci nejaký čas povyšovali: Vždy si vybrali náhodne, koho z nich povýšia, ale Štvrtka vždy povýšili o 4 stupne, Piatka o 5, Šestka o 6 a Sedmu o 7 stupňov. Po čase sa dostali do stavu, že títo štyria zamestnanci boli opäť na štyroch susediacich stupňoch, avšak nie nutne rovnakých, ako na začiatku. **V akých rôznych poradiach mohli skončiť? Nezabudni nájsť všetky riešenia.** Poznámka: Tridsiaty a prvý stupeň tiež považujeme za susediace.

Pozrime sa najskôr, na aké rôzne stupne mohli byť jednotliví zamestnanci povýšení.
Štvrtko: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30
Piatko: 5, 10, 15, 20, 25, 30
Šestko: 6, 12, 18, 24, 30
Sedma: 7, 14, 21, 28, 5, 12, 19, 26, 3, 10, 17, 24, 1, 8, 15, 22, 29, 6, 13, 20, 27, 4, 11, 18, 25, 2, 9, 16, 23, 30

Štvrtko môže byť povýšený na všetky párne stupne. Piatko iba na tie, ktoré sú násobkami čísla päť, podobne Šestko iba na stupne, ktoré sú násobkami čísla 6. Sedma môže byť na všetkých stupňoch.

Môžeme si všimnúť, že dvaja z nich musia byť na párnych stupňoch a dvaja na nepárnych, keďže zo štyroch po sebe idúcich čísel sú vždy dve párne a dve nepárne. Štvrtko a Šestko však môžu byť povýšení iba na párne stupne, a teda Piatko a Sedma musia byť na nepárnych stupňoch. Pre Piatka to teda znamená, že môže byť iba na stupňoch 5, 15 a 25.

Poďme teda overiť tieto tri možnosti tak, že pri každej z nich sa najskôr pozrieme, na akých stupňoch mohol byť Šestko (má najmenej možností zo zvyšných zamestnancov), ďalej Štvrtko a nakoniec Sedma. Ešte k tomu sa nám stačí pozerať na stupne, ktoré sú najviac o dva stupne ďalej od Piatka. Ak by totiž medzi Piatkom a iným zamestnancom boli viac ako dva stupne, tak by sme potrebovali viac ako dvoch zamestnancov, ktorí by vyplnili stupne medzi Piatkom a týmto zamestnancom, avšak my máme už len dvoch ďalších.

Ak by bol Piatko na 5. stupni:
Šestko musel byť na 6. stupni. Štvrtko teda mohol byť na 4. alebo 8. stupni. Ak by bol Štvrtko na 4. stupni, tak by Sedma mohla byť na 3., ale aj na 7. stupni. Ak by bol Štvrtko na 8. stupni, tak by boli obsadené stupne: 5, 6 a 8, teda Sedma musí byť na 7. stupni.

To máme teda 3 možnosti: Sedma, Štvrtko, Piatko, Šestko (3, 4, 5, 6)
Štvrtko, Piatko, Šestko, Sedma (4, 5, 6, 7)
Piatko, Šestko, Sedma, Štvrtko (5, 6, 7, 8)

Ak by bol Piatko na 15. stupni:

Šestko mohol byť na 12. alebo 18. stupni. Stupňom Šestka je však už teraz dané, kde museli byť Štvrtko a Sedma, pretože treba vyplniť 2 voľné stupne medzi Štvrtkom a Piatkom. To sa dá spraviť iba tak, že Štvrtko bude na párnom a Sedma na nepárnom z týchto stupňov. To sa určite bude dať, lebo Štvrtko môže byť na ľubovoľnom párnom a Sedma na ľubovoľnom stupni.

Tu máme teda ďalšie 2 možnosti: Šestko, Sedma, Štvrtko, Piatko (12, 13, 14, 15)
Piatko, Štvrtko, Sedma, Šestko (15, 16, 17, 18)

Ak by bol Piatko na 25. stupni:
Šestko mohol byť iba na 24. stupni. Štvrtko mohol byť na 22. alebo 26. stupni. Ak by bol Štvrtko na 22. stupni, tak sú obsadené stupne: 22, 24 a 25, teda Sedma musela byť na 23. stupni. Ak by bol Štvrtko na 26. stupni, tak by Sedma mohla byť na 23. stupni alebo aj na 27. Stupni.

To sú posledné 3 možnosti: Štvrtko, Sedma, Šestko, Piatko (22, 23, 24, 25)
Sedma, Šestko, Piatko, Štvrtko (23, 24, 25, 26)
Šestko, Piatko, Štvrtko, Sedma (24, 25, 26, 27)

Keďže všetky poradia sú rôzne, mohli skončiť vo vypísaných **ôsmich** rôznych poradiach.

Bodovanie:
za každé správne poradie zamestnancov okrem pôvodného – 7×0,5b.; za spôsob hľadania týchto poradí – 1,5b.

Úloha 3: Marketingové rošambo – *Opravovala Monika Machalová*

Každý z piatich marketérov postupne povedal tri výroky:

Klempiduch:
1. Ja som reklamu nepokazil.
2. Nikdy v živote som nič nepokazil.
3. Šibrikant ju teraz pokazil.

Džaberkvoky:
1. Ja som reklamu nepokazil.
2. V škole ma naučili, ako sa robí dobrá reklama.
3. Potemkus vie, kto reklamu pokazil.

Mulion:
1. Ja som reklamu nepokazil.
2. Než som sa stal marketérom, ani som nepoznal Potemkusa.
3. Šibrikant ju pokazil

Šibrikant:
1. Ja som reklamu, verte či neverte, nepokazil.
2. Potemkus ju pokazil.
3. Klempiduch klame, keď tvrdí, že som ju pokazil ja.

Potemkus:
1. Ja som reklamu nepokazil.
2. Džaberkvoky ju pokazil.
3. Mulion sa za mňa zaručí, pozná ma od narodenia.

Vzápätí sa všetci tichým hlasom ohradili, že každý z nich povedal práve dve pravdy a jednu lož, o čom vraj dali vedieť malým písmom. **Kto pokazil reklamu?**

Máme tu piatich marketérov, z ktorých práve jeden pokazil reklamu. My potrebujeme zistiť, ktorý z nich to bol.

Každý z marketérov povedal práve jednu lož, zvyšné dve jeho vety sú pravda. Zároveň si môžeme všimúť, že prvý výrok každého z nich je obhajoba – *„ja som reklamu nepokazil"*. Keďže jeden z nich reklamu pokazil, ten marketér bude musieť v tejto vete klamať.

Pozrime sa napríklad na Klempiducha. Keby reklamu pokazil, musel by klamať vo svojom prvom výroku *(„ja som reklamu nepokazil")*, a v ostatných by teda už musel hovoriť pravdu. Klempiduch vo svojom treťom výroku ale žaluje na niekoho iného – hovorí, že reklamu pokazil Šibrikant. To určite nemôže byť pravda, pretože reklamu pokazil iba jeden z nich. Preto **Klempiduch nemohol pokaziť reklamu**, pretože by to znamenalo, že klamal dvakrát *(„Ja som reklamu nepokazil a pokazil ju Šibrikant")*.

Toto isté si môžeme všimnúť aj u troch ostatných marketérov – aj Mulion, Šibrikant a Potemkus žalujú na niekoho iného. Keby nikto z nich pokazil reklamu, znamenalo by to, že musel klamať dvakrát (ako sme si už ukázali u Klempiducha). Teda ani **Mulion, Šibrikant, ani Potemkus reklamu nepokazili**.

Preto jediný**, kto mohol reklamu pokaziť, bol Džaberkvoky**.

Pozrime sa ešte na to, či takáto situácia vôbec existuje, teda či naša úloha vôbec má riešenie. Na to musíme zistiť, ktorý marketér klamal v ktorom výroku.

Klempiduch žaluje na Šibrikanta. Keďže vieme, že Šibrikant reklamu nepokazil, Klempiduchov tretí výrok *„Šibrikant ju teraz pokazil"* je klamstvo.

Šibrikant zase žaluje na Potemkusa. Keďže vieme, že Potemkus reklamu nepokazil, Šibrikantov tretí výrok *„Potemkus ju pokazil"* je klamstvo.

Pozrime sa na Muliona. Jeho tretí výrok, *„Šibrikant ju pokazil"*, musí byť klamstvo. V ostatných tvrdeniach musí hovoriť pravdu, teda pravda je aj to, že než sa stal marketérom, nepoznal Potemkusa.

Potemkus tvrdí, že sa s Mulionom pozná od narodenia, čo tým pádom nemôže byť pravda. Potemkusov tretí výrok *„Mulion sa za mňa zaručí, pozná ma od narodenia"* je klamstvo. Jeho ostatné výroky sú pravda, teda aj to, že reklamu pokazil Džaberkvoky.

Džaberkvoky reklamu pokazil, teda klame vo svojej obhajobe – *„ja som reklamu nepokazil"*. Jeho zvyšné výroky sú pravda, a všetko nám sedí.

Bodovanie:
za správnu odpoveď – 1b.; za ukázanie, prečo to jeden zo štyroch nevinných nebol – 1b.; za dôkaz ktoré jeho tvrdenie nevinného je klamstvo – 1b.; za vysvetlenie, ako to vychádza na Džaberkvokiho – 2b.

Úloha 4: Nákres č. 676 – *Opravovali Marianna Hronská, Tereza Prokopová a Peter „Bubu“ Onduš*

„Aby sme maximalizovali zisk, musíme rozmiestniť štyri písmenká do tabuľky 4 × 4 tak, aby v každom riadku, stĺpci a aj v oboch diagonálach bolo práve jedno písmenko. Teraz vám položím sériu otázok, aby som vedel, či viete zlepšiť výrobné procesy továrne:

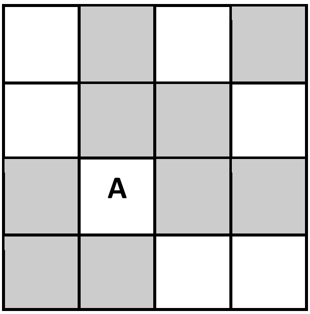
5 6 7 8 9 P S T K : Koľko je možných rôznych rozmiestnení, ak sú všetky štyri písmenká zhodné (a teda navzájom zameniteľné)?

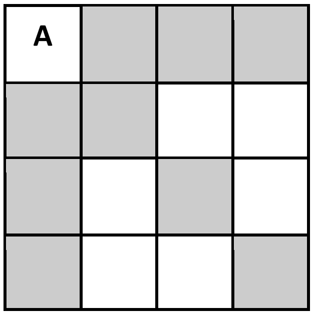
6 7 8 9 P S T K : Koľko je možných rôznych rozmiestnení, ak sú všetky štyri písmenká rôzne (napríklad A, B, C, D)?

7 8 9 S T K : Teraz rozmiestnite do tabuľky 4 písmenká A, 4 písmenká B, 4 písmenká C a 4 písmenká D tak, aby v žiadnom riadku, stĺpci ani diagonále neboli zhodné písmenká. **Koľkými rôznymi spôsobmi sa to dá?“**

Poznámka ku všetkým otázkam: Rozmiestnenia, ktoré sa dajú dostať otočením či preklopením iných rozmiestnení, považujeme za *rôzne*.

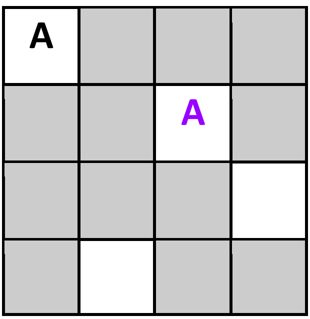
V prvej otázke úlohy sa pozrieme koľko možných rôznych rozmiestnení existuje, ak sú všetky štyri písmenká zhodné. Rozdeliť písmenká len každé do jedného riadku a stĺpca je pomerne jednoduché, diagonály nám však úlohu stažili. Preto sa najskôr pozrime, čo sa stane, ak písmenko položíme na jednu z diagonál. Všimnime si, že ak položíme jedno z písmeniek na diagonále do stredného štvorca 2×2, zvyšné políčka v ňom sú už

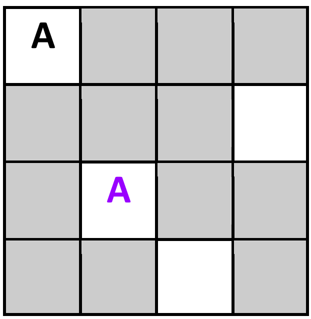




„nepoužiteľné“ alebo, ak položíme písmenko do rohu na diagonálu, tak ostatné rohy sú už „nepoužiteľné“. Preto aby sme dodržali podmienku o diagonálach musí byť vždy jedno písmenko v strednom štvorci a jedno v rohu:

Vidíme, že ak písmenko položíme do rohu na diagonálu, tak na zvyšných políčkach riadku, stĺpca a diagonály, v ktorých je, nemôžeme položiť ďalšie písmenko. Môžeme vidieť, že ak chceme ďalšie písmenko položiť na druhú diagonálu, tak máme 2 možnosti, ako to spraviť:

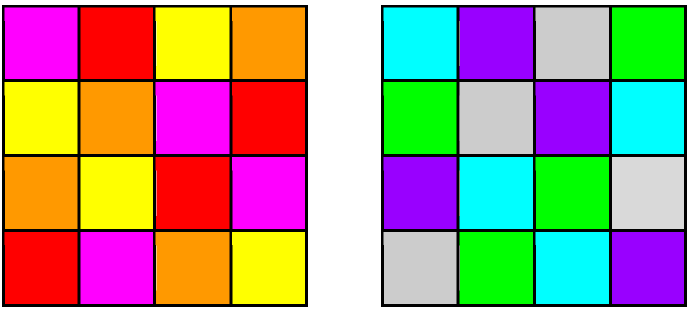




Vyšli nám dve rôzne riešenia, lebo ak zvyšné písmenká doplníme do prázdnych políčok, tak všetky štyri ležia v rôznych riadkoch, stĺpcoch aj na rôznych diagonálach. Viac možností nevieme urobiť, ak chceme zachovať to, že na oboch diagonálach bude iba jedno písmenko. Lenže, my chceme úplne všetky možnosti. Ak keď začneme v iných rohoch diagonál, pričom každý tento roh má dve možnosti, ako rozmiestniť zvyšok, tak máme dokopy až **8 možností**.

V druhej otázke úlohy chceme znova rozmiestniť 4 písmenká tak, aby neboli na rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečkach, ale tentokrát máme 4 rôzne písmenká. Z predchádzajúcej otázky už vieme, že existuje 8 možností, ako písmenká vieme rozmiestniť. Ak si zoberieme hociktoré z rozmiestnení, tak na prvú pozíciu rozmiestnenia, vieme dať jedno zo 4 písmen. Na druhú pozíciu vieme dať jedno zo zvyšných 3 písmen. Na tretiu jedno zo zvyšných 2 a posledné dáme na zvyšnú pozíciu. To nám dá dokopy $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností, v akom poradí písmenká rozmiestniť. A keďže máme 8 možností rozmiestnení, tak máme dokopy $8 \cdot 24 =$ **192 možností**.

V tretej otázke úlohy chceme rozmiestniť 4 písmenká A, 4 písmenká B, 4 písmenká C a 4 písmenká D tak, aby rovnaké písmenká neboli v rovnakom riadku, stĺpci a uhlopriečkach. My však už vieme, že takýchto rozmiestnení existuje 8 rôznych, lebo sme to dokázali pri prvej otázke. Môžeme si všimnúť, že týchto 8 rôznych možností dokážeme doplniť do dvoch tabuliek, pričom v každej sú 4 rôzne možnosti.



Už stačí iba rozmiestniť písmenká. Ako sme už v druhej otázke zistili, tak na rozmiestnenie 4 rôznych písmeniek existuje 24 možností. Pretože do prvej štvorice vieme doplniť hociktoré zo 4 písmeniek, do druhej štvorice hociktoré zo zvyšných 3, do tretej štvorice hociktoré zo zvyšných 2 a do štvrtej štvorice doplníme posledné písmenko. Dokopy nám to dá $2 \cdot 24 =$ **48 možností**.

Bodovanie:

Kategória 5: za splnenie podmienok o riadkoch – 2,5b.; za splnenie podmienok o diagonálach – 2,5b.

Kategórie 6 a P: za správne vyriešenie prvej podúlohy – 2,5b. za správne vyriešenie druhej podúlohy – 2,5b.

Kategórie 7, S, 8, T, 9 a K: za správne vyriešenie prvej podúlohy – 1,5b (za dokázanie všetkých možností – 1b.; za správnu odpoveď – 0,5b.); za za správne vyriešenie druhej podúlohy . 1,5b. (za ukázanie, že možných rozmiestnení rôznych písmeniek je 24 – 1b.;

za správnu odpoveď – 0,5b.); za správne vyriešenie tretej podúlohy – 2b. (za správnu odpoveď – 1b.; za ukázanie, že viac možností neexistuje – 1b.)

Úloha 5: Interview – *Opravovali Fedor Župník, Martin Kliment a Peter Kochelka*

„Povedzme, že napíšem na papier niekoľko celých čísel, pričom žiadne nie je deliteľné tromi. Ak z týchto čísel vyberiete ľubovoľné tri, tak ja viem z tých vami vybratých troch čísel vybrať dve tak, že ich súčet bude deliteľný šiestimi. **Koľko najviac čísel som mohol na začiatku napísať na papier?**“

Vieme, že každé číslo sa dá zapísať ako násobok šiestich plus zvyšok nula až päť. Ak chceme dostať číslo deliteľné šiestimi sčítaním dvoch čísel, ktoré šiestimi deliteľné nie sú, musíme sčítať dve také čísla, že ich zvyšky po delení šiestimi majú súčet nula alebo šesť. Takáto operácia sa dá zapísať takto: $6a + b + 6c + d = 6(a + c) + b + d$. Vidíme, že $6(a + c)$ už šiestimi deliteľné je, teda nám stačí zaistiť, aby bol súčet zvyškov 0 alebo 6, čo ide štyrmi spôsobmi. Buď je zvyšok jedného čísla 0 a druhého 6 (čo je tiež 0), jedného 1 a druhého 5, jedného 2 a druhého 4, alebo jedného aj druhého 3. Zadanie ale hovorí, že žiadne z čísel nie je deliteľné tromi, čo nespĺňajú zvyšky 0 ani 3, lebo všetky také čísla sú násobky čísla 3.

Zo zadania vieme, že čísla boli na začiatku najmenej tri, z ktorých boli vybrané tri, z ktorých dve boli dokopy deliteľné šiestimi. Tri čísla na začiatku mohli mať zvyšky napríklad 1, 1 a 5, lebo z tých vieme vybrať 1 a 5. Keby na začiatku boli štyri čísla, napríklad 2, 2, 4 a 4, akákoľvek trojica bude obsahovať aj 2 aj 4, čiže na začiatku mohli byť aj štyri čísla. Avšak keby sme mali čísel 5, vieme, že zo štyroch zvyškov, čo máme na výber (1, 2, 4, 5), vieme v najhoršom možnom prípade vždy vybrať trojicu zvyškov tak, aby žiadne dva zvyšky z nej nemali súčet 6, pretože pätica zvyškov môže obsahovať:

Jednu dvojicu rovnakých zvyškov, napríklad (1, 2, 4, 4, 5). Vyberme do našej trojice práve tieto dva rovnaké zvyšky. Zjavne tieto dva zvyšky nebudú dokopy rovné 6. K nim vyberme jeden zvyšok taký, že k nim „nepasuje“, teda s naším zvyškom nie je dokopy 6 (v našom prípade napríklad). Taký zvyšok určite existuje, nakoľko ku každému zvyšku pasuje práve jeden iný a nám v pätici zostali tri rôzne. Teda v takomto prípade **existuje trojica čísel, ktorá nespĺňa podmienku zadania**.

Dve dvojice rovnakých zvyškov, napríklad (2, 2, 4, 5, 5), alebo (1, 2, 2, 4, 4). Zoberme do našej trojice ten jeden zvyšok, ktorý nemá páru. K nemu bude pasovať najviac jedna dvojica rovnakých zvyškov (keďže ku každému zvyšku pasuje najviac jeden iný). Stačí teda, ak k nemu do trojice vezmeme dvojicu zvyškov, ktoré k nemu nepasujú. Vtedy táto trojica **nebude spĺňať podmienku zadania**.

Skupinu troch a viac rovnakých zvyškov (4, 4, 4, 5, 5). Vtedy vieme jednoducho vybrať trojicu rovnakých zvyškov a vieme, že žiadne dva z nich nemajú súčet 6. Teda ani tu **nie je splnená podmienka zadania**.

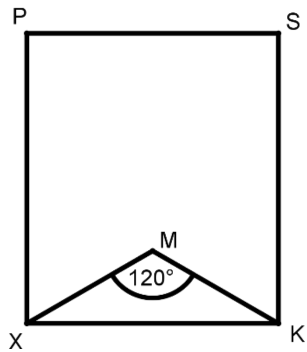
Vidíme, že v každom z prípadov vieme z danej pätice vybrať tri zvyšky tak, aby sa v trojici nevyskytovali spolu 1 a 5, ani 2 a 4. Päť čísel a viac teda na papieri na začiatku byť napísaných nemohlo, takže odpoveďou je, že na papieri boli najviac štyri.

Bodovanie:
Kategórie 7, 8 a 9: za správny výsledok – 1b.; za kompletný postup – 4b.
Kategórie S, T a K: za správny výsledok – 2b.; za dôkaz, že na papieri mohli byť najviac 4 čísla – 3b.

Úloha 6: Etiketa nadovšetko – *Opravovali Marián Poturnay a Andrej Špitalský*

V rohoch obdĺžnikového stola sedeli postupne Klom, Stum, Plom a Xom. Čašník položil na stôl misu sliviek tak, aby bola rovnako ďaleko od Kloma ako od Xoma. Obsah plochy trojuholníka vyznačeného miskou, Klomom a Xomom je presne osminou obsahu plochy celého stola. Keď sa Klom a Xom naraz načiahli za miskou, ich ruky zvierali uhol 120°. **Keď sa po slivky načiahne aj Plom, aký uhol bude zvierať Plomova ruka s Klomovou rukou?**

Označme si rohy obdĺžnikového stola (vrcholy obdĺžnika) podľa prvého písmena toho, kto pri danom rohu sedí. Klom tak bude sedieť pri vrchole K, Stum pri vrchole S, Plom pri vrchole P a Xom pri vrchole X. Taktiež si označme písmenom M bod, kde sa nachádza misa sliviek. Zo zadania vieme, že uhol XMK má veľkosť $120°$. Všetky tieto informácie si môžeme nakresliť do takéhoto obrázku:



V zadaní taktiež máme dve informácie o trojuholníku XKM. Bod M má byť rovnako vzdialený od X a od K, čiže trojuholník XKM je rovnoramenný so základňou XK. Zároveň platí $|MX| = |MK|$.

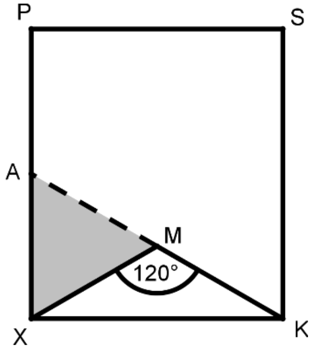
Druhou informáciou, ktorú máme v zadaní, je, že obsah trojuholník XKM je osminou obsahu obdĺžnika $XKSP$. Pozrime sa, čo nám táto podmienka hovorí. Pokúsme sa vyjadriť obsahy týchto útvarov. Pritom využime to, že majú spoločnú jednu stranu – XK. Obsah obdĺžnika je $S_{XKSP} = |XK| \cdot |XP|$. Obsah trojuholníka XKM je $S_{XKM} = |XK| \cdot v_M/2$, kde v_M je výška na stranu XK v trojuholníku XKM. Z tohto dostávame:

$$S_{XKSP} = 8 \cdot S_{XKM}$$
$$|XK| \cdot |XP| = 8 \cdot |XK| \cdot v_M/2$$
$$\boldsymbol{|XP| = 4 \cdot v_M}$$

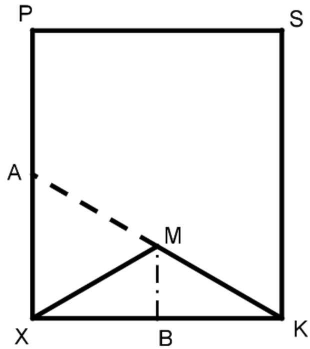
Výška na stranu XK v trojuholníku XKM tak tvorí štvrtinu „výšky“ celého obdĺžnika.

Pripomeňme si, čo máme zistiť. Potrebujeme zistiť veľkosť uhla KMP. O ramene MK tohto uhla už máme pomerne veľa informácií. O ramene MP ale nevieme skoro nič. Potrebujeme sa tak o tejto úsečke niečo dozvedieť. Náhodnejšie z bodov M a P zatiaľ pôsobí bod P, a tak by bolo fajn zistiť o ňom niečo. Vyzerá to ale tak, že pomocou týchto piatich bodov, ktoré už máme v obrázku, nezistíme nič viac o bode P. Potrebujeme tak do obrázku nakresliť nejaký ďalší bod.

Keď dokresľujeme nejaký bod, vždy sa zíde dokresliť taký bod, o ktorom budeme vedieť niečo povedať. Pri dokresľovaní bodov sa zvyčajne oplatí zamyslieť sa nad predĺženiami nejakých čiar na obrázuku, o ktorých už niečo vieme. V tejto úlohe máme už dosť dobré informácie o úsečkách XM a KM. Za pokus by tak mohlo stáť predĺžiť niektorú s týchto čiar a pretať ju s nejakou stranou. Potrebujeme dostať nejaké informácie o bode P, a preto si zvoľme taký priesečník čiar, ktorý s bodom P nejako súvisí. **Označme si tak A priesečník priamky KM a strany XP** – tento bod totiž súvisí s bodom P tak, že leží na jednej z úsečiek, na ktorej leží aj P a o ktorej máme aspoň nejakú informáciu (to, že uhol PXK je pravý).

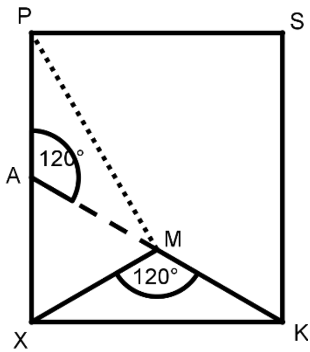


Pozrime sa, aké ďalšie vlastnosti má bod A. Konkrétne sa zamerajme na trojuholník AXM. Uhol AMX je susedný k uhlu KXM a má preto veľkosť $|\sphericalangle \boldsymbol{AMX}| = \mathbf{180° - 120° = 60°}$. Zároveň vieme v trojuholníku XKM vypočítať, že veľkosť uhla MXK je $|\sphericalangle \boldsymbol{MXK}| = \mathbf{(180° - 120°)/2 = 30°}$. Pomocou toho a pravého uhla AXK dopočítame veľkosť uhla AXM, ktorá tak je $|\sphericalangle \boldsymbol{AXM}| = \mathbf{90° - 30° = 60°}$. V trojuholníku AXM tak máme dva uhly s veľkosťou $60°$. Tým ľahko dopočítame, že uhol XAM má veľkosť $|\sphericalangle \boldsymbol{XAM}| = \mathbf{180° - 60° - 60° = 60°}$. Všetky uhly v trojuholníku AXM tak majú rovnakú veľkosť, čo znamená, že trojuholník AXM je rovnostranný, a teda platí $|\boldsymbol{AX}| = |\boldsymbol{AM}| = |\boldsymbol{MX}|$. Zároveň ale už máme $|MX| = |MK|$, a tak platí $|\boldsymbol{AX}| = |\boldsymbol{AM}| = |\boldsymbol{MX}| = |\boldsymbol{MK}|$. Z rovnosti $|AM| = |MK|$ ale vyplýva, že **bod M je stredom úsečky AK**.



Ešte sme ale poriadne nepoužili to, že sme odvodili $|XP| = 4 \cdot v_M$. Dokreslime si preto túto aj výšku a označme B jej pätu. Keďže je trojuholník XKM rovnoramenný, tak je päta tejto výšky v strede základne. To znamená, že **bod B je stredom úsečky XK**. Keď sa teraz pozrieme na trojuholník AXK, tak v ňom máme dva stredy strán – M je stredom strany AK a B je stredom strany XK. Z toho vyplýva, že **úsečka MB je strednou priečkou trojuholníka AXK rovnobežnou so stranou AX**. Preto je úsečka AX dvakrát dlhšia ako úsečka MB. Pre dĺžku AX tak platí:

$$|\boldsymbol{AX}| = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{v_M} = \mathbf{2} \cdot |\boldsymbol{XP}|/\mathbf{4} = |\boldsymbol{XP}|/\mathbf{2}$$



Z tejto rovnosti ale máme to, že **bod A je stredom úsečky XP**. Platí tak $|AX| = |AP|$. Lenže $|AX| = |AM| = |MX| = |MK|$. Preto platí dokonca $|AP| = |AX| = |AM| = |MX| = |MK|$. Špeciálne tak dostávame $|AP| = |AM|$, čo znamená, že **trojuholník APM je rovnoramenný**. Vďaka tomuto sme sa konečne dozvedeli niečo o úsečke MP.

Ľahko dopočítame veľkosť uhla MAP, ktorý je susedný k uhlu MAX, a má tak veľkosť $|\sphericalangle \boldsymbol{MAP}| = \mathbf{180° - 60° = 120°}$. Z rovnoramenného trojuholníka APM tak ľahko dopočítame, že veľkosť uhla AMP je $|\sphericalangle \boldsymbol{AMP}| = \mathbf{(180° - 120°)/2 = 30°}$ (pozornému oku neunikne, že trojuholníky AMP a MXK sú zhodné).

Uhol KMP, ktorého veľkosť hľadáme, je susedný k uhlu AMP. To znamená, že jeho veľkosť je $|\sphericalangle \boldsymbol{KMP}| = \mathbf{180° - 30° = 150°}$.

Bodovanie:
za odvodenie vzťahu $|XP| = 4 \cdot v_M$ – 1b.; za zadefinovanie bodu A – 0,5b.; za ukázanie, že A je stred úsečky XP – 1,5b; za ukázanie, že trojuholník APM je rovnoramenný – 1b.; za odvodenie, že veľkosť uhla KMP je $150°$ – 1b.

Úloha 7: Zatvorené – *Opravovali Pavol „Tamara" Hronský a Samuel Vaško*
Kvasostrojič chodil po obvode haly a otváral dvere. Na začiatku boli všetky dvere zatvorené. Začal tým, že otvoril prvé dvere a potom otvoril vždy *druhé nasledovné zatvorené* dvere v poradí. Od posledných dverí vždy plynule pokračoval k prvým. Toto robil dookola, až kým nezostali zatvorené len jedny dvere. Napríklad ak by bolo v hale 6 dverí, otvoril by ich v poradí 1, 3, 5, 2, 6 a zatvorené by zostali dvere číslo 4. **Ktoré dvere by zostali zatvorené, ak:**

A) Bolo v hale 20 dverí?
B) Bolo v hale 240 dverí?
C) Bolo v hale 12 000 dverí?

Označme si celkový počet dverí N. Budeme sa snažiť nájsť nejaký všeobecný vzorec a potom konkretizovať úlohu pre zadané počty. Pravdaže keď N=20 vieme si na papier napísať ručne 20 čísel a zistiť, ktoré dvere zostanú zatvorené. Lenže keď chceme vyriešiť podúlohu C, mali by sme nájsť nejaký systém, preto práve poďme riešiť úlohu univerzálne, teda pre N dverí.

Majme rad čísel 1, ..., N. Nech K je číslo dverí, ktoré zostanú zatvorené ako posledné. A teraz zoberme do úvahy, že máme čísla 1, ..., N, N+1, ... 2N. Týchto čísel nutné musí byť párny počet (lebo 2N je deliteľné 2mi). Predstavme si, že dvere sú na kružnici, teda po prvom kole otvoríme všetky nepárne dvere (presne polovicu), tj 1, 3, ..., 2N-1 a ostanú nám dvere s číslami 2,4, ...,2N-3, 2N. Môžeme si všimnúť, že všetky tieto čísla sú násobkami čísla 2 a teda ak by sme „vyňali" 2 pred zátvorku, tak by sme dostali dvere s číslami 2 · (1,2, ..., N-1, N). Pre takýto rad už ale vieme výsledok a to K, čiže vo všeobecnosti vieme povedať, že ak máme dvojnásobný počet dverí, tak aj posledné číslo dverí, ktoré ostanú zatvorené je 2K.

Poďme si to vyskúšať najprv na **podúlohe A**. Máme 20 dverí. Ak posledné zatvorené sú K-te z nich, tak pri desiatich dverách by to boli K/2-té dvere. A pri piatich dverách K/2/2=K/4-té dvere. Tu nám nezostane iné, ako sa pozrieť na situáciu s piatimi dverami. Otvoríme dvere s číslom 1, potom 3, 5 a následne 4. Zatvorené zostanú dvere s číslom 2. Teda pri desiatich dverách by zostali zatvorené dvere s číslom 2·2=4 a pri **dvadsiatich dverách dvere s číslom 4·2=8**. Presvedčte sa vypísaním si situácie pre 20 dverí, že to tak skutočne bude.

Pozrime sa na **podúlohu B**. Poučení predošlou úvahou, zjednodušme si 240 delením dvomi – následne budeme spätne dvomi násobiť číslo dverí, ktoré dostaneme. 240/2=120; 120/2=60; 60/2=30 a 30/2=15. Stačí sa nám teda pozrieť na situáciu s 15 dverami a výsledok štyrikrát vynásobiť dvomi. Pre 15 dverí otvárame postupne dvere s číslami 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 4; 8; 12; 2; 6; 10 a zatvorené zostanú dvere s číslom 14. Teda Ak je dverí 240, násobíme naspäť 14·2·2·2·2=224. **Zatvorené zostanú dvere s číslom 224.**

V **podúlohe C** budeme postupovať podobne. Budeme deliť 12 000 dvomi a následne po vyriešení jednoduchšej situácie naspäť dvomi vynásobíme. Po piatich vydeleniach dvomi (čiže akoby po piatich kolách otvárania dverí z pôvodných 12 000) dostaneme 12000/2/2/2/2/2 = 375, čo už dvomi vydeliť nevieme. To je ešte stále priveľmi vysoké číslo na to, aby sme si situáciu vypísali ručne. Pozrime sa teda, ako táto situácia vyzerá – vezmime 375 dverí a tak ako predtým si predstavme, že sú očíslované od 1 po 375.

V šiestom kole otvoríme všetky nepárne dvere, tým pádom otvoríme aj posledné dvere. Teda do siedmeho kola sa nám prenesie polovica všetkých dverí bez jedných, pretože dverí s nepárnym číslom je o jedny viac. Zostane nám teda (375+1)/2=188 dverí. Môžeme si to predstaviť aj tak, že sme akoby „pridali“ a otvorili jedny dvere na začiatku ďalšieho kola, čím sa výsledné dvere o 1 posunuli. Toto posunutie je spôsobené tým, v každom „normálnom“ kole začíname otvárať dvere vždy od prvých, ale v siedmom by sme začínali od druhých zo zostávajúcich dverí. Pridanie fiktívnych dverí na začiatok siedmeho kola a ich otvorenie tento problém rieši, len túto fiktívnu úpravu nesmieme zabudnúť aj zvrátiť. Preverte si, že táto úvaha funguje napríklad na prípade s jedenástimi dverami.

Poučení tým, čo robiť ak dostaneme po niektorom kole nepárny počet dverí si môžeme zostaviť zjednodušovaciu tabuľku. Budeme do nej písať vždy aktuálny počet dverí a akú úpravu sme spravili, čiže ako dostaneme nový počet dverí. Pridáme aj stĺpec na „výsledok“, teda ktoré dvere zostanú zatvorené. Tento stĺpec budeme vedieť spätne doplniť, ak budeme poznať riešenie situácie v poslednom riadku (v našej tabuľke už je doplnený).

kolo	počet dverí (N)	úprava	výsledok
1	12 000	N/2	7 616
2	6 000	N/2	3 808
3	3 000	N/2	1 904
4	1 500	N/2	952
5	750	N/2	476
6	375	(N+1)/2	238
7	188	N/2	120
8	94	N/2	60
9	47	(N+1)/2	30

10	24	N/2	16
11	12	N/2	8
12	6	N/2	4
13	3	triviálne	2

Posledný riadok obsahuje situáciu s tromi dverami, kde je každému jasné, že zatvorené zostanú druhé dvere. Stačí teda spätne zistiť, ako to bolo pri 12 000 dverách. Nezabudnime pri tom, že spätná operácia k (N+1)/2 je (výsledok-1)·2, pretože musíme „odstrániť“ tie fiktívne dvere, čo sme si pridal a posunúť sa tak naspäť. Pri vykonávaní spätných úprav sa pritom pozeráme vždy o riadok vyššie, aby sme zistili danú úpravu.

Po vykonaní všetkých úprav dostaneme pre podúlohu C tak, ako je zaznačené aj v tabuľke, výsledok že zatvorené zostanú dvere s číslo 7616.

Bodovanie:

za správny výsledok podúlohy A – 0,2b.; za správny výsledok podúlohy B – 0,4b.; za správny výsledok podúlohy C – 0,6b.; za kompletný postup – 3,8b.

Úloha 8: Darovať čas – *Opravovala Hana Kluvancová*

V hale sa prechádzalo *N* mníchov. Všetci mnísi si navzájom popodávali ruky tak, aby si každý podal s každým ruku práve raz. Vždy, keď si dvaja mnísi podávali ruky, vybrali si spomedzi seba jedného, ktorému na krku pribudli zavesené vreckové hodinky a ostali mu tam visieť. Na konci z haly odišiel každý mních ktorému na krku viselo menej hodiniek ako niektorému inému mníchovi. **Koľko najviac mníchov mohlo ostať v hale?**

Na konci z haly odišiel každý mních ktorému na krku viselo menej hodiniek ako niektorému inému mníchovi. Keďže otázka znie, koľko najviac mníchov mohlo v hale ostať, úlohu chceme riešiť tak, aby sme na konci mali čo najviac mníchov s rovnakým a zároveň najvyšším počtom hodiniek.

Pozrime sa najprv na to, koľko bolo dokopy všetkých podaní rúk a zároveň celkový počet rozdaných hodiniek. Vzorec na výpočet celkového počtu mníchov sa dal zistiť rôznymi spôsobmi. Popíšeme si tie dva najjednoduchšie a najprehľadnejšie.

Máme počet mníchov N. Každý mních si podá ruku s (N-1) mníchmi – nemôže si podať ruku sám so sebou. Teda môžeme vyberať vždy jedného mnícha z celkového počtu N a druhého, s ktorým si ide podať ruku z počtu (N-1), teda N·(N-1). Lenže podanie ruky medzi dvoma mníchmi sa uskutoční iba raz, nezávisle od toho, či vyberieme zo skupiny N mnícha „A“ a zo skupiny (N-1) mnícha „B“ alebo vyberieme zo skupiny N mnícha „B“ a zo skupiny (N-1) mnícha „A“ . Podanie ruky A-B je to isté ako B-A, a teda musíme tento počet podeliť dvomi – takto sa zbavíme všetkých dvakrát započítaných podaní. Výsledný vzorec na výpočet celkového počtu rúk bude teda N.(N-1) /2

Na vzorček sa dalo prísť aj iným ako kombinatorickým spôsobom. Pozrime sa na nasledovnú tabuľku:

	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

V tomto prípade sme zvolili N=5. Každého mnícha sme pomenovali písmenom A-E. Ak sa pozrieme na riadok pre napr. mnícha A, vidíme, že si podá ruku s každým okrem seba, teda s mníchmi B-E. To je počet podaní 5-1, všeobecne (N-1). To isté platí v riadkoch B až E, každý mních si podáva ruku s každým okrem seba. Teda týchto N-1 podaní sa nám zopakuje N-krát, pretože máme N mníchov, a teda N·(N-1). No rovnako ako v predošlom spôsobe, z tabuľky vieme vyčítať, že v hornej časti máme rovnaké podania ako v dolnej časti - riadok A a stĺpec E predstavuje rovnaké podanie ako riadok E a stĺpec A , čiže každé podanie máme započítané dvakrát. Preto musíme tento počet N·(N-1) vydeliť 2 → výsledný vzorec je teda N·(N-1)/2.

Na vzorec sa dalo prísť aj inými spôsobmi, či už pomocou kombinačných čísel alebo iných úvah.

Poďme si rozobrať dva prípady toho, aké môže byť N:

N je nepárne. Vzorec na výpočet výsledného počtu podaní rúk je N·(N-1)/2. Vieme, že celkový počet hodiniek (a teda aj podaní rúk) musí byť prirodzené číslo. Chceme, aby mníchov zostalo čo najviac, tak sa pozrime najprv, či môžu zostať všetci. V takom prípade by všetci mnísi museli mať rovnaký počet hodiniek. Teda počet hodiniek by musel byť deliteľný číslom N. Vidíme, že ak vydelíme náš vzorec číslom N, zostane nám (N-1)/2. Keďže N je nepárne, tak N-1 je párne, a teda počet hodiniek každého mnícha by teoreticky bol prirodzené číslo. To nám hovorí, že budeme vedieť rozdeliť celkový počet hodiniek rovnomerne medzi všetkých N mníchov. Potrebujeme už len nájsť spôsob, ako to urobiť. Keďže N je nepárne, dá sa zapísať v tvare N=2k+1, kde k je nejaké prirodzené číslo alebo 0. Postavme teda všetkých mníchov do kruhu, každý mních tak bude mať k mníchov bližšie smerom doprava a k mníchov bližšie smerom doľava od seba po obvode kruhu. Teda stačí, ak si odnesie hodinky z podaní rúk z mníchmi viac naľavo. Naopak pri podaní si rúk s mníchmi viac napravo si hodinky odnesie druhý mních. Ak toto spravia všetci mnísi, tak si každý odnesie práve k hodiniek. Premyslite si, prečo to tak je.

N je párne. Poďme sa opäť pozrieť, či vedia ostať všetci mnísi. Skúmame teda, rovnako ako v predošlom prípade, či si mnísi vedia rovnomerne rozdeliť počet hodiniek. Ak ho teda vydelíme N, opäť nám zostane (N-1)/2. No v tomto prípade je N párne, teda N-1 je nepárne a nie je deliteľné dvomi. Preto by počet hodiniek každého mnícha nebol prirodzené číslo.

Všetci mnísi teda v miestnosti zostať nemohli. Mohlo ich zostať o jedného menej? Nakoľko N-1 je nepárne číslo, tak stačí, ak títo N-1 mnísi urobia to, čo sme už popísali v predošlom prípade a vedia zostať všetci. Posledný mních jednoducho pri každom podaní rúk odovzdá hodinky svojmu kolegovi a s 0 hodinkami ako jediný odíde.

Odpoveď na otázku, koľko najviac mníchov mohlo ostať v hale teda je, že pokiaľ by bol počet mníchov N nepárny, mohlo ostať v hale N mníchov a pokiaľ by bol počet mníchov párny, mohlo ostať v hale N-1 mníchov.

Bodovanie:
za správny výsledok – 2b. (pre nepárny počet mníchov – 1b.; pre párny počet mníchov – 1b.); za nájdenie a zdôvodnenie všeobecného vzorca na počet podaní rúk – 2b.; za výsledné zhodnotenie pre párny a nepárny počet mníchov – 1b.

Poznámka:
Pri riešeniach s vypísaním zopár možností a vypozorovaním súvislosti medzi počtom mníchov a počtom podaných rúk bez akéhokoľvek logického odôvodnenia bolo možné dosiahnuť najviac 4b. Bolo nutné na vzorec prísť aj nejakou logickou úvahou.