Gustovi však bolo *jasné*, že na to Janči prísť nemohol, teda súčet musel byť taký, aby sa *nedal* rozložiť na také „jednoduché čísla“ ako 2 a 5. Teraz by som mohol povedať, že kvôli tomuto vyškrtám už všetko ostatné okrem správneho riešenia, ale keďže toto je tá najťažšia časť, tak ju spravím spolu s vami. Prejdime si spolu všetkých 6 zatiaľ nevyškrtnutých dvojíc.

3 a 4 som ukázal teraz.

2 a 6 – súčet 8. Keby Gusto poznal súčet 8, čísla by mohli byť 3 a 5 a Janči by mohol poznať súčin 15 (ktorý je jednoznačný), takže Gusto by nemohol s istotou vedieť, že Janči to neurčí.

3 a 6 a **4 a 5** – súčet 9. Ak by Gusto poznal súčet 9, čísla mohli byť 2 a 7, čo by Janči tiež na základe súčinu 14 vedel jednoznačne určiť.

2 a 10 – súčet 12, čo je aj súčet čísel 3 a 9, takže ak by Gusto poznal súčet 12, nebolo by mu jasné, že Janči nevie určiť súčet, lebo čo ak by Janči poznal súčin 27 a vedel určiť, že čísla sú 3 a 9 a teda súčet 12?

č.1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6
č.2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	4	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	6	7	8	7
súčet	5	6	7	8	9	10	11	12	13	7	8	9	10	11	12	13	9	10	11	12	13	11	12	13	13
súčin	6	8	10	12	14	16	18	20	22	12	15	18	21	24	27	30	20	24	28	32	36	30	35	40	42
dôvod	1	2	1	4	1	2		4	1	4	1	4	1	3	2	3	4	3	3	3	3	3	1	3	3

Vyškrtol som už všetky zvyšné dvojice (**dôvod 4**) okrem jednej. Mohol by som teda tú poslednú (2 a 9) prehlásiť za správne riešenie? **NIE!** – jednak sa môže stať, že príklad nemá riešenie (čo by bolo pri takomto príklade od nás strašne škaredé), ale aj kvôli kontrole – čo ak som sa pomýlil a omylom vyškrtol niečo, čo som nemal, a teraz prehlásim za správne riešenie niečo, čo som mal vyškrtnúť? Keďže v zadaní bola aj otázka, ako na to chlapci prišli, pozrieme sa na to teraz **z ich pohľadu** – ako premýšľali. Čísla sú 2 a 9, Janči vie súčin 18, Gusto vie súčet 11.

Janči si myslí: ‚Buď sú to 2 a 9 (súčet 11) alebo 3 a 6 (9).‘

Gusto si myslí: ‚Buď sú to 2 a 9 (súčin 18), 3 a 8 (24), 4 a 7 (28) alebo 5 a 6 (30).‘

Janči vraví: „Neviem určiť súčet.“

Gusto si pomyslí: ‚To mi teda nič nepomohlo. Aj 18, aj 24, aj 28, aj 30 sa dajú napísať ako súčin rôznymi spôsobmi, takže nemám šajnu, ktoré z toho mu Hanka povedala. Keď on mi skoro nič nepovedal, nepoviem mu skoro nič ani ja.‘ a povie: „To je mi jasné (že ho nevieš určiť). Súčet je menší ako 14.“

Janči sa zamyslí: ‚Hmm... menší ako 14, to som vedel, buď je 9 alebo 11... Ale prezradil mi viac ako chcel – je mu jasné, že neviem určiť súčet... zaujímavé... Keby to bolo 9, také jasné by mu to nebolo, veď on by vedel 9 aj v prípade, že by čísla boli 2 a 7, a to by som ja vedel, že súčin je 14... A to by som veru ľahko určil. Ale ak je súčet 11, tak mu je to fakt jasné, lebo všetky čísla 18, 24, 28 aj 30 sa dajú napísať viacerými spôsobmi.. Takže súčet je určite 11. Cha! Čiže čísla sú 2 a 9!‘ A povie Gustovi: „Bolo mi jasné, že súčet je menší ako 14, ale teraz už čísla poznám.“

Gusto neverí svojim ušiam: ‚Ak mu to bolo jasné, ako to, že už čísla pozná??? No, ale ak mu to bolo jasné, tak tie súčiny nemohli byť 24, 28, ani 30, lebo tie sa predsa dajú napísať aj ako 2×12, 2×14 a 2×15, čo už má veľké súčty (14, 16, 17). Takže on pozná súčin 18. Takže čísla sú 2 a 9.‘ „Už aj ja.“

Takže takto to tí huncúti vyhútali a Hankine šťastné čísla sú 2 a 9.

Bodovanie: Riešenie na 5 bodov muselo obsahovať aj pohľad chlapcov – oni mali úplne iné informácie ako my a pracovali v inom poradí, preto ich postup je dosť iný ako náš. Za neprítomnosť pohľadu chlapcov na záver som strhával len 0,5b. Zaseknutie v polovici na 6 možných dvojiciach – okolo 2,5b. Ako vždy – záležalo od dôkladnosti odôvodnenia jednotlivých krokov.

P-MATn.o.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 27. ročník šk. rok 2009/2010

PIKOMAT

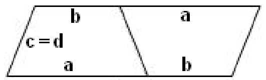
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Návrh. *Opravovala Katka Beláková.*

V prvom rade si bolo teba uvedomiť, že mám z danej štvorice čísel (a, b, c, d) zistiť počet trojuholníkov v lichobežníku, nech už sú tie rozmery akékoľvek. Čiže riešiť príklad všeobecne a nie len zrátať tých 8 trojuholníkov, z ktorých sa skladá vzorový lichobežník na obrázku v zadaní.

Keďže všetky strany lichobežníka musia ležať na čiarach papiera a základne sú rovnobežné, lichobežník bude vždy rovnoramenný (teda c = d) – keby ramená nemali rovnakú dĺžku, nemohli by ležať iba na čiarach papiera alebo by základne nemohli byť rovnobežné. Uvedomíme si ešte, že dva rovnostranné trojuholníčky vytvoria kosoštvorec a nie štvorec, ako sa niektorí z vás mylne domnievali.

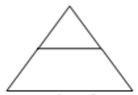
Fintou na zjednodušenie je doplniť si lichobežník na rovnobežník (útvar, ktorý má protiľahlé strany rovnobežné a rovnako dlhé) pridaním takého istého, len obráteného lichobežníka k jednému z jeho ramien. (obr. 1)



obr. 1

Počet trojuholníkov teda bude ***a+b*** (počet *kosoštvorcov* v jednom riadku rovnobežníka) ****c*** (alebo ***d***, počet riadkov) ****2*** (pretože v každom kosoštvorci sa nachádzajú dva malé rovnostranné trojuholníky) **:2** (lebo ten **náš** *lichobežník* je len **polovicou** *rovnobežníka*). Čiže počet trojuholníkov v lichobežníku bude ***(a+b)*c*** alebo ***(a+b)*d***. Toto platí pre akékoľvek hodnoty a, b, c, d.

Tento príklad sa samozrejme dal riešiť aj inými spôsobmi. Niektorí si napríklad všimli, že priemerný počet kosoštvorcov v jednom riadku je priemer dĺžok základní. Alebo si lichobežník doplniť na rovnostranný trojuholník doplnením trojuholníka nad kratšiu základňu (obr. 2). Počty trojuholníčkov vo vzniknutom veľkom a pridanom malom trojuholníku sa potom odčítajú. Počet trojuholníčkov v akomkoľvek rovnostrannom trojuholníku je vždy **a*a** (kde **a** je dĺžka strany). Dá sa na to prísť podobnou úvahou ako hore, kde som dopĺňala rovnaký, len prevrátený útvar. Takže iný zápis toho istého riešenia môže byť tiež ***a*a – b*b***.

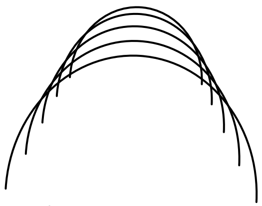

obr. 2

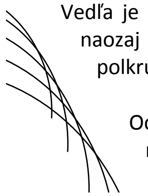
Bodovanie: dobrý výsledok bez vysvetlenia postupu – max 2b.; zvyšok podľa miery zdôvodnenia.

Príklad S2: Mesiac. *Opravoval Mišo Kováč.*

Najprv si musíme uvedomiť, že dve polkružnice môžu mať maximálne 2 priesečníky. Ak by mali 3 priesečníky, tak potom tie 3 body určujú kružnicu a teda by celý ten kružnicový oblúk mali spoločný, čo Janči v zadaní zakázal. Takže úplné maximum priesečníkov by bolo, keby mala každá polkružnica s každou 2 priesečníky: teda MAX = 20 priesečníkov.

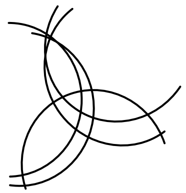
Niektorí z vás sa tu zastavili, že to je výsledok. To však nestačí, ešte treba dokázať, že tých 20 priesečníkov sa naozaj dá zostrojiť. Na prvom obrázku je vidieť spôsob, akým sa dá zostrojiť ľubovoľne veľa polkružníc tak, aby každá s každou mala dva priesečníky.





Vedľa je priblížená časť obrázka, ktorá je vpravo hore – vidíme, že naozaj na každej strane bude tých priesečníkov 10 (každá polkružnica s každou inou):

Ocenil som (aj keď nie bodmi) aj zamyslenie nad Gustovým zamyslením. Najviac sa vám podarilo nájsť 16 priesečníkov. No dá sa nájsť aj 18, napr. na nasledovnom obrázku:



Bodovanie: správny výsledok s konštrukciou - 3b.; horšia konštrukcia – strhával som do 1,5 bodu (ale tak veľa len v prípadoch ako napríklad použitie trištvrtekružníc namiesto polkružníc); zdôvodnenie, že MAX=20 – zvyšné 2b.

Príklad S3: Majiteľova úloha. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

V tomto príklade pracujeme s prirodzenými číslami a pre jednoznačnosť si definujeme, že sú to kladné celé čísla väčšie ako 0. Nula pre potreby vzoráku nebude považovaná za prirodzené číslo, za jej používanie v riešení som ale body nestrhával. Keďže prirodzených čísel je nekonečne veľa, je nepraktické snažiť sa niečo ukazovať na každom jednom z nich. Preto si najprv prirodzené čísla rozdelím do 3 skupín (množín) podľa istých spoločných vlastností.

Množina N (nepárne) – obsahuje *všetky nepárne čísla* okrem jednotky (3,5,7,...). Tieto čísla nie sú deliteľné 2 – vo svojom prvočíselnom rozklade neobsahujú 2.

Množina P (párne) – obsahuje všetky *párne čísla, ktoré ale majú nejakého nepárneho deliteľa* (6,10,12,14,...). Ostala množina M – obsahuje jednotku a všetky párne čísla, ktoré nemajú žiadneho nepárneho deliteľa a teda sa dajú rozložiť len na súčin dvojok. Tieto čísla sú tzv. mocniny dvojky (1,2,4,8,16,32,...).

Čísla z množiny N vieme zapísať ako súčet dvoch po sebe idúcich čísel veľmi jednoducho. Stačí vydeliť dvojkou, zaokrúhliť nadol a nahor a tieto 2 čísla tvoria súčet. Príklad: 55 / 2 = 27,5. 27 + 28 = 55.

Čísla *p* z množiny P sa dajú zapísať v tvare *p=n.x*, pričom *n* je najmenší nepárny deliteľ. Potom *x* postavíme do prostriedka a zľava k nemu pripisujeme čísla menšie ako *x*, sprava zasa čísla väčšie. Pripisujeme dovtedy, kým ich dokopy nie je *n*. Dostaneme postupnosť, ktorej súčet je *p*. Príklad: 56 = 7*8, *n=7, x=8*. 5+6+7+**8**+9+10+11 = 56. Prečo? Lebo 7+9=2*8=16, 6+10=16, 5+11=16. Vidíme, že každým pripísaním jedného čísla pred a jedného za *x* sme spolu pripísali súčet vždy *+2x*. Teda máme v rade vlastne 7 čísel, ktorých priemer je 8, tak sme ten súčet konštruovali. Problém môže nastať, ak je *x* príliš malé. Príklad: 14 = 7*2, *n=7, x=2*. Napísali by sme (-1)+0+1+**2**+3+4+5 = 14. Záporné čísla a aj nula nám trochu vadia. My sme však kľudní, lebo (-1)+0+1 sa nám spolu „vyšantia“ a ostane z nich 0, takže z postupnosti ostane **2**+3+4+5 = 14. Ešte jeden príklad, ktorý som s obľubou písal na Vaše riešenia: 356 = 89*4, *n=89, x=4*. Dostali by sme (-40)+(-39)+...(-1)+0+1+2+3+**4**+5+6+...+47+48 = 356. Opäť (-40)...40 sa spolu „vyšantia“ a zostane súčet 41+42+43+44+45+46+47+48 = 356 –> hurá!

Čísla z množiny M sa rozpísať nedajú. Dôkaz je trocha ťažší – nevyžadoval som ho. Ale pre šikovnejších je tu nápoveda: súčet postupnosti sa dá vyjadriť ako *(A+B)*n / 2*; pričom A a B sú prvé a posledné číslo postupnosti, *n* je počet čísel. Aby výsledok bol deliteľný iba 2, musia aj *n* aj *(A+B)* byť deliteľné iba 2. Toto (že *n* je párne) nás núti ku postupnosti, ktorá začína párnym a končí nepárnym číslom (alebo naopak), avšak v takom prípade *(A+B)* bude nepárne a to nám neprekonateľne vadí.

Bodovanie: 5 bodov za správny výsledok + z postupu bolo jasné, ako rozkladať čísla, ktoré sa rozložiť dajú. Z takého postupu bolo totiž jasné aj to, prečo sa čísla z M nejdú rozkladať.

Nejasnosti pri rozklade P – 4.8–3.5b.

Iba výsledok a postup pre rozklad N – 3–2.5b.

Len postup pre N a pokus o postup pre P, bez výsledku – 2b.

Správna odpoveď bez postupov alebo zlá odpoveď a systém aspoň pre N – 1,5–1b.

Náznak pokusu o hľadanie riešenia – 0.5b.

Príklad S4: Kniha. *Opravovala Janka Štolcová.*

Zoberme si podľa zadania akékoľvek trojciferné číslo *abc* a to isté číslo napísané odzadu, *cba*. Hneď môžeme vidieť, že ak *a=c*, tak máme dve rovnaké čísla a teda ich odčítaním nemôže vzniknúť nič iné ako 0. K tej aj keď pripočítame to isté číslo odzadu (tú istú 0:)), tak to už nezmeníme.

Inak odčítavame menšie číslo od väčšieho. Označme čísla tak, že *a* je väčšie ako *c*. Počítame teda...

$$\begin{array}{r} abc \\ -\,cba \\ \hline def \end{array}$$

Označme si zatiaľ výsledok *def* a počítajme: "*a* a koľko je *c*?" Vieme, že *a* je väčšie ako *c*, t.j. nastane prechod cez 10 a potom *f=c+10-a*, pričom 1 nám zostala, tú pripočítame k *b* v menšiteľovi. Tým pádom ale zase odpočítavame väčšie od menšieho, čo znamená prechod cez 10. Potom *e=b+10-(b+1)=9*, 1 nám zostala. A nakoniec *d=a-(c+1)*. Vieme teda, že prvá číslica čísla **Č** bude ***a-(c+1)***, stredná číslica bude ***9*** a posedná ***c+10-a***. V čísle Č napísanom odzadu sa len vymenia cifry na miestach jednotiek a stoviek. Takže sčítavajme:

c+10-a + a-(c+1) = 9; 9+9 = 18; 8 napíšeme, 1 nám zostala

a-(c+1) + c+10-a + 1= 10.

$$\begin{array}{ccc} a-(c+1) & 9 & c+10-a \\ c+10-a & 9 & a-(c+1) \\ \hline 10 & 8 & 9 \end{array}$$

Mnohí ste sa vyjadrovali k prípadu, ak *a-(c+1)=0*, teda posledná cifra pôvodného čísla je o jedno väčšia ako prvá. V takom prípade *c+10-a = c+10-(c+1)=9*, teda číslo **Č** je **99**. Napísané odzadu je to 99 a potom súčet **198**. Niektorí ste sa na Č pozreli ako na 099 a potom *099+990=1089*. Je jedno, ako ste to chápali, pokiaľ ste sa tým nenechali zmiasť. ;)

Bodovanie: vyskúšanie náhodného čísla a výsledok 1089 –1b.; za rozumné argumenty a postrehy body pribúdali; zistenie, že prostredná cifra čísla Č je 9 a nejaký vzťah medzi prvou a poslednou cifrou – min 3b.

Príklad S5: Hádanka. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Hneď na úvod sa ospravedlňujem tým, ktorí si na internete prečítali zlú verziu zadania, kde nám vypadlo, že Hankine čísla sú prirodzené a väčšie ako 1. Tých som hodnotil zvlášť (no úvahy sú to podobné, takže ak ste tým prešli vtedy, tento vzorák tiež nebude problémom).

Ja som si vypísal všetky dvojice čísel, ktoré sú väčšie ako 1 a ich súčet je menší ako 14 (2 a 3, 2 a 4,..., 6 a 7). Dokopy 25 dvojíc. Dvojica typu 4 a 4 nie sú *dve* šťastné čísla (keby sme hľadali „číslo x a číslo y“, bolo by treba uvažovať aj o prípade x=y, no takto je to niečo iné). Teraz: čo chlapci povedali. Janči poznal súčin, no nevedel z neho určiť súčet, nevedel jednoznačne určiť tie dve čísla. Súčin teda musel byť taký, ktorý sa dá rozložiť na viac dvojíc činiteľov väčších ako 1. Takže to nesmie byť súčin dvoch prvočísel. Vyškrtám takéto dvojice čísel (pre lepšiu názornosť v tabuľke poznačím aj **dôvod vyškrtnutia 1**). Hneď škrtnem aj súčiny ako 3×9=27, lebo tiež nemáme inú možnosť ako dostať 27 (**dôvod 2**). Janči síce najprv nepoznal súčet, no vraj vedel, že je menší ako 14. To znamená, že súčin, ktorý vedel, sa **nedal** rozložiť na takú dvojicu činiteľov, aby ich súčet bol väčší alebo rovný 14. Teda to nebolo napríklad 42 – to sa dá rozložiť na 2×21, takže ak by Janči poznal súčin 42, nemohol by si byť istý, že súčet je určite menší ako 14. Takéto súčiny sú všetky párne od 24 vyššie – dajú sa rozložiť na 2×niečo; škrtnem ich (**dôvod 3**).

Ostali nám súčiny 12, 18, 20 a ku každému dve dvojice možných čísel. Sem sa dopracovala celkom slušná časť z vás, no mnohí tu skončili a nevedeli, ako ďalej. Ak ste to potiaľto vysvetlili dobre, mali ste už 2,5 boda vo vrecku. Ako ale zistiť, ktorá z tých šiestich dvojíc je tá pravá? Toto je dosť ťažký myšlienkový postup, napriek tomu, že naň netreba skoro žiadnu matematiku. Poďme na to postupne. Naozaj záleží na každom slove v zadaní. Gustovu vetu „To je mi jasné“ bohužiaľ mnohí z vás nepovažovali za podstatnú, v riešení ju ani nespomenuli. A práve ona teraz rozhodne ☺.

Gusto povedal, že mu bolo jasné, že Janči to nevie určiť. Teda Gusto vedel taký súčet, že všetky k nemu prislúchajúce súčiny sa dajú dosiahnuť viacerými spôsobmi. Uff, ťažká veta, ospravedlňujem sa, ale myslím, že keď vám ukážem príklad, bude vám to jasné. **Ak** by Gusto vedel, že súčet je 7, čísla by mohli byť 2 a 5 alebo 3 a 4. Tak by vedel, že Jančiho súčin je buď 10 alebo 12. 10 sa ale dá dosiahnuť ako súčin len jedným spôsobom, takže Janči by na to prišiel.