Ostalo nám presne šesť čísel, ktoré musia byť deliteľmi hľadaného čísla: 2, 3, 6, 9, 18, 27. Ich najmenší spoločný násobok je 54. Lenže 54 je dvojciferné číslo a my hľadáme trojciferné. Ale vieme, že hľadané číslo bude násobok 54. Keby sme 54 vynásobili 2, dostaneme síce trojciferné číslo, ale toto číslo bude deliteľné 4 a túto možnosť sme už vyššie vylúčili. Keď vynásobíme 54*3 dostaneme číslo 162, čo nám nepridá ani jedeného deliteľa spomedzi zadaných čísel. Teda *číslo 162 je najmenšie trojciferné číslo, ktoré je deliteľné práve polovicou zo zadaných čísel*.
Vyskytlo sa aj iné, bohužiaľ nesprávne pochopenie príkladu. Niektorí z vás riešili príklad tak, že hľadali najmenší spoločný násobok *polovíc* čísel zo zadania, teda 1; 1.5; 2; 3; 4; 4.5; 6; 8; 9; 12; 13.5; 18. <u>Lenže deliteľnosť je vlastnosť celých čísel</u> a preto nemôže byť správne riešenie hľadanie najmenšieho spoločného násobku týchto čísel. Preto ste za toto riešenie nedostali viac ako 3 body v závislosti od riešenia a výsledku (108 alebo 216).
<u>Bodovanie:</u>
Správny postup aj riešenie...5b;
nesprávne pochopenie príkladu so správnym riešením...maximálne 2,5 až 3 body;

Príklad S5: Kakao. *Opravoval Juro Pavlovič.*

Základný fakt, ktorý si bolo treba uvedomiť: *deti sa pohybujú vždy o 2 miesta*. Dúfam, že mi každý uverí, keď poviem toto: máme 12 šálok; očíslujeme si ich 1-12; *keď si nejaké dieťa na začitku sadne k párnemu číslu, bude potom už celý čas sedieť pri párnom čísle* (a takisto s nepárnym). Týmto vznikajú dva uzavreté okruhy „párnych“ a „nepárnych“ šálok, medzi ktorými sa nedá prechádzať.
Teraz... ako si deti môžu do týchto okruhov posadať? Existujú v podstate iba 2 možnosti:
1. všetky 3 deti si posadajú do toho istého okruhu;
V tomto prípade je to veľmi jednoduché. Baba-Jaga si môže vyložiť nohy a zapnúť svoju perníkovú telku, pretože všetky deti sedia v jednom okruhu a teda k 6 šálkam v tom druhom okruhu sa nikdy ani nedostanú.
2. dve deti budú v jednom a jedno dieťa v druhom okruhu;
Baba-Jaga si nebude všímať okruh s dvoma deťmi – ten sa po chvíli vyprázdni a ostane stále prázdny. Ona bude zatiľ dolievať iba tie šálky, ktoré vypilo dieťa, ktoré je samé vo svojom okruhu, a teda tento okruh udrží plný (6 šálok).
Niektorí z vás upozornili na to, že v okamihu, keď to osamotené dieťa dopije svoju šálku, je na stole iba 5 plných šálok (aj keď budú vzápätí doliate na 6) a teda sa Babe-Jage nepodarilo udržať 6 plných šálok – toto som pri aktuálnom znení zadania musel považovať za správne riešenie.
<u>Bodovanie:</u> Akékoľvek ukázanie, že v určitom momente bude na stole iba 5 plných šálok...5 bodov.
Inak: Uvedenie, že sú 2 uzavreté okruhy...+1bod; porovnanie sedenia detí v okruhoch 3:0 a 2:1...+1bod; ukázanie, že pri 3:0 to funguje...+1bod; popis, čo má Baba-Jaga robiť pri 2:1...+1,5bodu.
Ako vidno, aj pri „nesprávnej“ odpovedi, že Baba-Jaga *dokáže* udržať 6 šálok plných, sa dalo získať 4,5 boda za korektné vysvetlenie.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Mince. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Krásna hra! Na začiatok zdôrazním jednu vetu zo zadania: „Musí otočiť jednu mincu... a potom ***<u>môže</u>*** otočiť niektorú naľavo od nej“. To, že druhú mincu točiť nemusí, dodáva tejto hre viac rôznych možných pozícií a variant. Pozrime sa teda, kto dokáže vyhrať. Hra sa skončí, keď bude vyzerať takto: XXXXXXXX - ten, čo bude vtedy na ťahu, prehrá. Nazvime si túto pozíciu PP0 (uvidíte prečo). Ako dostať súpera do takejto pozície?

Pozrime sa na túto situáciu, ktorá môže nastať: **OOOXXXXX** (označme ju PP1). Mincami lícom navrch sa už nedá (a ani nebude dať) nijako pohnúť – nie sú naľavo od žiadnej mince, čo by bola rubom navrch. Takže sa dá hrať len tými troma mincami vľavo. Nech ten, čo je na ťahu, spraví hocaký ťah (môže otočiť jednu alebo niektoré dve z nich), tak prehrá, lebo jeho súper otočí tie zvyšné (dve alebo jednu). Takejto pozícii hovoríme **<u>prehrávajúca pozícia</u>** <u>– nech ten, čo je na ťahu, spraví hocičo, aj tak prehrá</u>. Keď si začneme kresliť/písať/hrať rôzne pozície hry, aby sme prenikli do jej tajov, prídeme na to, že prehrávajúcich pozícií je viac (akurát na tie „viacťahové“ prídeme až neskôr). Poďme však postupne.

Určite je prirodzenou myšlienkou začať hľadať stratégiu pre prvého (aj keď pri inom počte mincí by mohla byť pre druhého) a zahájiť hru tým, že znížime počet „hrateľných“ mincí. Tak to skúsme, uvidíme, či to prvému pomôže. Prvý hráč teda otočí mincu úplne vpravo a tú hneď vedľa nej. OOXXOOXX. Druhý má teraz 14 možných ťahov (hádam je jasné, ktorých), no asi neotočí dve O mince (6 rôznych ťahov), lebo by hneď prehral (prvý by otočil tie zvyšné dve →PP0). Keby otočil jednu z tých dvoch mincí v strede, prípadne s ňou aj tretiu mincu v rade, prvý jednoducho zahrá ťah, ktorým sa druhý dostane do PP1. Pozrime sa však na zvyšné 4 ťahy – OOX**O**O**X**XX, OOX**OX**OXX, O**X**XXOOXX a **X**OXXOOXX.

- Ak druhý zahrá OOXOOXXX, prvý má k dispozícii 12 ťahov, z ktorých je 10 podobne prehrávajúcich ako u druhého hráča o pár riadkov vyššie, no môže zahrať **OXXOOXXX** a XOXOOXXX. Pozrime sa na ten prvý (ten druhý nechám na vás). Ak druhý otočí jednu alebo dve O-mince, prehrá (prvý otočí zvyšné dve alebo jednu). No ak otočí jednu O v strede a jednu X vľavo od nej, prehrá tiež, lebo prvý potom otočí tú druhú O v strede a tú druhú X, čím dostane druhého hráča zase do PP1. Preto aj **pozícia OXXOOXXX je prehrávajúca** (nazvime ju PP2).
- Ak druhý zahrá OOXOXOXX, prvý má na výber 13 ťahov. Väčšina z nich sú zlé ťahy (druhý by hneď vyhral alebo by ho dostal do PP1), po ťahoch OOXOOXXX a OXXOXOXX by ho druhý dostal do PP2, no ak zahrá **XOXOXOXX**, druhý bude musieť zvoliť jeden z 12 ťahov, z ktorých: 6 je rovno prehrávajúcich (otočí len O mince), po štyroch ho prvý dostane do PP1 a po dvoch (XOXOOXXX, OXXOXOXX) do PP2. Takže máme ďalšiu prehrávajúcu pozíciu **XOXOXOXX** = PP3.
- Ak druhý hráč zahrá na začiatku ťah OXXXOOXX, je nám už jasné, že ho prvý hneď dostane do PP2.

- Ak druhý zahrá XOXXOOXX, prvý má na výber z 13 ťahov, z ktorých je zase väčšina na prvý pohľad zlá, ale jeden z nich je aj **XOXOXOXX**, o ktorom sme si ukázali, že vedie k výhre – pre jeho súpera je to prehrávajúca pozícia.

To, že prvý mal na výber aj kopu zlých ťahov, nám nevadí, keďže vždy mal k dispozícii aj ťah, ktorým dokázal dostať druhého do prehrávajúcej pozície.

Ak teda prvý hráč začne ťahom OOXXOOXX, bude vedieť odpovedať na každý možný ťah druhého tak, že nakoniec vyhrá. To je začiatok jeho stratégie. Pokračovaním je spraviť vždy taký ťah, ktorým druhého hráča dostane do PP0. Ak taký nie je, tak do PP1, PP2, alebo PP3. A ukázali sme si, že nech druhý zahrá hocičo, prvý si vždy taký ťah nájde.

Bodovanie: Na 5 bodov musela vaša stratégia obsahovať ťahy, ktoré má prvý hráč robiť (resp. pozície, do ktorých má dostať súpera), a museli ňou byť pokryté všetky súperove ťahy. Nemuseli ste nájsť všetky prehrávajúce pozície (tých je mimochodom 16), stačilo mi toľko, aby ste do nich vedeli dostať súpera v každej situácii. No a samozrejme z vášho riešenia muselo byť jasné, že ide o stratégiu pre prvého hráča.

Príklad S2: Benzín. *Opravoval Dano „Žofka“ Lovásko.*

Kľúčom k správnemu riešeniu bolo správne určiť aktuálny rok a uvedomiť si pojmy ako "pred siedmimi rokmi". Pred zdražovaním bola cena stále rovnaká, čiže N. V prvý rok zdražovania bola cena súčtom cien z posledného roku pred zdražovaním a predposledného roku pred zdražovaním, čiže 2N. Druhý rok zdražovania bola cena súčtom posledného roku pred zdražením (N) a prvého roku, kedy sa zdražovalo (2N), čiže 3N. Tretí rok zase súčet prvého a druhého roku zdražovania, čiže 5N. Takto to pokračuje (8N, 13N, 21N), až sa dostaneme k aktuálnemu, siedmemu roku, čo je 34N. Zo zadania vieme, že minulý rok bola cena 60 dolárov, čiže si spravíme jednoduchú rovnicu: 21N = 60. Z tej nám vyjde, že N = 60/21 = 2,857142857. Nás zaujímali dve ceny, a to: cena tento rok (34N) a cena pred zdražením (N). Cena tento rok je 34 * 60/21 = 680/7 = 97,142857143. Cena pred zdražením bola N, čiže 2,857142857.

Kde ste robili chyby? Najčastejšie ste si neprečítali podstatnú vetu „predtým bola cena rovnaká“. Preto ste príklad nezačali počítať ako rovnicu, ale začali ste tipovať, až vám vyšlo niečo, čo sa síce dopracuje k riešeniu, nespĺňa však podmienku, ktorú ste si nevšimli - stálu cenu pred zdražovaním.

Je zaujímavé, že tí, ktorí to tipovali, majú výsledok 97. Tí, ktorým to vyšlo správne, majú 97,14 a tí, ktorí to posunuli o rok, majú výsledok 97,06 :)

Bodovanie: Správne riešenie a postup – 5 bodov (bonus – krásna ilustrácia kvetinky :);
Posunutie o jeden rok, mysleli ste si, že prebieha ôsmy rok – 4,5 bodu;
Riešenie bez dodržania podmienky o predchádzajúcej stálej cene – 2 body;
Riešenie bez postupu – mínus 2 body;

Príklad S3: Menovky. *Opravoval Mišo Kováč.*

Tesne pred zadaním bola nešťastná veta o stole tvaru štvorca, ktorý dodáva zadaniu nejednoznačnosť. Nevieme totiž, či môžeme otočiť stôl o jedno miesto, keď pri jednej strane štvorcového stola sedia viacerí. Ale uznával som obidve pochopenia.

Predpokladajme teda, že stôl sa dá vždy posunúť aj o jedno miesto – môžeme si ho predstaviť ako kruhový. Uvediem dve riešenia, ktoré sa vyskytovali najčastejšie. Obidve platia pre počet detí 2 a viac, takže aj pre 4, 8 aj 12.

Prvé: Ukážem riešenie pre 8 detí – neskôr bude vidieť, že to platí aj pre ľubovoľný (celočíselný :) počet detí n. Máme okolo stola **8** detí. Existuje **8** možných natočení stola. Vieme, že na začiatku nikto pri sebe nemá svoju menovku. Teda musí mať svoju menovku pri sebe len v niektorom – **práve jednom** – zo **7** zvyšných natočení. A teraz pozor: To znamená, že pri **aspoň jednom** natočení majú **aspoň dve** deti pri sebe svoju menovku. (prirovnanie: ak máme v holubníku 7 dier a je tam 8 holubov, tak v aspoň jednej diere sú aspoň dva holuby). Toto tvrdenie sa nazýva aj *Dirichletov princíp*, známy ako *pidgeonhole principle (princíp holubníka)*. Všimni si tú podobnosť s riešením našej úlohy.

Druhé: Chceme **dokázať**, že **pri každom** rozostavení **existuje** natočenie stola také, aby **aspoň dve** deti mali pri sebe svoju menovku. To je ale to isté, ako keby sme chceli **vyvrátiť**, že **existuje** rozostavenie také, že pri **každom** natočení stola má **najviac jedno** dieťa pri sebe svoju menovku. Takže skúsime hľadať také rozostavenie a zistíme, že sa nedá nájsť.

Máme **n** miest pri stole. Menovky sú tak, že menovka prvého je vľavo od tej druhého, ktorá je vľavo od tej tretieho...atď. Skúsme usadiť prvého. Má **n-1** možností, lebo nemôže sedieť pri svojej menovke. Ako to bude s druhým? Nemôže sedieť pri svojej menovke, no nemôže sedieť ani hneď vpravo od prvého, lebo by s ním tvoril dvojicu, na ktorú sa dá natočiť stôl. Niekto by mohol zapochybovať: čo ak obidve obmedzenia hovoria o tom istom mieste? Nemôžu, lebo v tom prípade by bol prvý pri svojej menovke. Takže sú to dve rôzne miesta, kam si nemôže sadnúť a teda na usadenie druhého máme **n-2** možností. Ako usadíme tretieho? Nemôže byť pri svojej menovke, vľavo od druhého ani o dve vľavo od prvého (s každým z nich by tvoril dvojicu). Podobným argumentom, ako bol ten predošlý, sa dá ukázať, že sa hovorí o troch rôznych miestach. Takže tretí má **n-3** možností.

No a takto budeme postupne usádzať. Posledný bude mať n-n = 0 možností. Čo to znamená? Že hocijako budeme usádzať, vždy po usadení n-1 detí to posledné už nebudeme mať kam uložiť tak, aby boli splnené podmienky. Teda nám ostane jediné miesto, na ktoré keď ho uložíme, bude existovať natočenie stola s dvoma vyhovujúcimi menovkami –> ***neexistuje** rozmiestnenie také, že pri každom natočení stola bude mať najviac jedno dieťa pri sebe svoju menovku.*

Toto druhé zdôvodnenie je náročnejšie na napísanie, ale asi jednoduchšie na vymyslenie, keďže väčšina to dokázala takto. Prvé zdôvodnenie je zas jednoduchšie na pochopenie, preto ho odporúčam.

Bodovanie: Správna odpoveď...1 bod – hocikto si môže len tak tipnúť. Dôležité bolo zdôvodnenie. Skúšať všetky možnosti nestačilo – pri 4 sa to ešte dalo vypísať, no pri 8 už je to asi 10000 možností a pri 12... pochybujem, že ste skúšali doma tých 100 miliónov možností (to by nestihol odskúšať ani bežný počítač). Komu sa podarilo inak ako skúšaním zdôvodniť, prečo to platí pri 4 deťoch, nebolo pre neho problémom to ukázať aj pre 8 a 12, či dokonca n detí.

Príklad S4: Heslo. *Opravovala Marta Kořínková.*

V zadaní sme mali 12 čísel (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36). Keď má byť hľadané číslo deliteľné práve polovicou z nich, bude deliteľné práve šiestimi z nich. Ak by nebolo deliteľné číslom 2, znamená to, že by nebolo párne a nemohlo by byť deliteľné ani jedným z čísel 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 36 (a 2). Ako možné delitele by zostali 3, 9, 27, čo je príliš málo. Teda hľadané číslo musí byť deliteľné 2. Ak by hľadané číslo nebolo deliteľné 3, nebolo by deliteľné ani 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36 (a 3). Takže by opäť nezostalo dosť deliteľov. Preto aj 3 musí byť deliteľom. Takže číslo je deliteľné aj 2 aj 3 a tým pádom určite bude deliteľné 6. Ak by bolo deliteľné 36, bolo by zároveň deliteľné aj 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, čo je spolu 8 deliteľov zo zadaných čísel - priveľa. Preto hľadané číslo nebude deliteľné 36. Ak by bolo číslo deliteľné 24, bude zároveň deliteľné aj 2, 3, 4, 6, 8, 12, čo je spolu 7 deliteľov zo zadaných čísel a to je opäť priveľa. Hľadané číslo nebude deliteľné ani 24.

Zatiaľ vieme, že číslo bude deliteľné 2, 3, 6 a nebude deliteľné 24, 36. Ak by bolo hľadané číslo deliteľné aj 4, znamená to, že by bolo deliteľné aj 8(2*4), 12(3*4), 24(6*4) a to sme vylúčili ako možnosť, ktorá nesmie nastať. Tým pádom hľadané číslo nesmie byť deliteľné 4 a z toho vyplýva, že ani 8, 12, 16. Zatiaľ sme vylúčili delitele 4, 8, 12, 16, 24, 36.