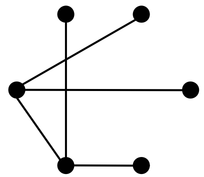
Ale ako nám aj zadanie hovorí, obaja chlapci hrajú najlepšie ako vedia a snažia sa vyhrať. To znamená, že pokiaľ ostane iba jedna stuha, ktorá spája vybrané dievča so zvyškom, ani jeden z chlapcov dobrovoľne neprestrihne takúto stužku.

Poslednou otázkou už iba zostáva, či jeden z chlapcov dokáže svojou „taktikou“ dotlačiť súpera k tomu, aby bol nútený sraviť prehrávajci ťah alebo každá hra bude mať v predposlednom ťahu n-1 stužiek a teda to, kto vyhrá a kto prehrá je dané iba počtom dievčat a poradím chlapcov.



A odpoveď je opäť pomerne jednoduchá – pokiaľ je počet stúh väčší ako n-1, tak chlapec, ktorý je na ťahu má určite možnosť prestrihnúť aspoň jednu stuhu tak, aby neprehral. Pred posledným ťahom môžu nastať rôzne situácie na lúke, avšak každú z nich charakterizuje rovnaký počet stúh medzi dievčatami (n-1).

A teraz keď už vieme ako bude končiť každá jedna hra, poďme vypočítať, kto vyhrá, v závislosti od konkrétneho počtu dievčat (celkový počet stúh vieme vypočítač ako súčet *1+2+3+...+(n-1)* keďže pri 1 dievčati nemáme žiadnu stužku, keď príde 2-hé dievča na lúku tak ju pripojíme 1 stuhou, keď príde 3-tie dievča na lúku tak ju spojíme so všetkými dievčatami, ktoré už sú na lúke (= *n-1 = 3-1 = 2* stuhy na to budeme potrebovať), atď):

Počet dievčat	*Zvyšok n po delení 4*	*Celkový počet stúh*		*Potrebné stuhy (p)*	*Hra končí ťahom*	*Víťaz*
n	*n : 4*	*m*		*p = n-1*	*m-p+1*	
2	2	+1	1	1	1.	druhý
3	3	+2	3	2	2.	prvý
4	0	+3	6	3	4.	prvý
5	1	+4	10	4	7.	druhý
6	2	+5	15	5	11.	druhý
7	3	+6	21	6	16.	prvý
8	0	+7	28	7	22.	prvý

V tabuľke si môžeme všimnúť pravidelnosť víťazov: prvý, prvý, druhý, druhý – ako vidíme, prvý vyhrá vtedy, ak počet dievčat po delení 4 dáva zvyšok 0 alebo 3. (Toto sa dá odvodiť zo vzťahu pre m-p, môžeš si to skúsiť sám).

Teda správne riešenie úlohy: to, kto vyhrá závisí od toho, kto začína teda prestrihned prvú stuhu a zároveň od počtu dievčat v dedine (aký je zvyšok počtu dievčat po delení 4).

Poznámky: dievčatá spojené každá s každou – nestačí s najbližšími susedami, dievčatá sú naozaj so všetkými ostatnými; skupina dievčat môže byť tvorená aj jedným dievčaťom (v zadaní išlo o to, aby dievčatá ostali všetky pokope).

Bodovanie: 5 bodov za úplné a správne riešenie, 3-4 body za čiastočné riešenie pre niektoré počty dievčat alebo neúplné vysvetlenie, 1-2 body za nedostatočné zdôvodnenie, od čoho závisí, kto vyhrá.

P-MAT n.o.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Členov družiny je 19, o čom sa môžeme presvedčiť, keď napočítame 19 výpovedí. Dvoch istých klamárov môžeme označiť ihneď - povedali čísla väčšie, ako je celkový počet členov družiny (22,41). Pri ostatných to nejde tak ľahko. Zamyslime sa nad tým, ako sa zachová skupina presne rozdelená na pravdovravných a klamárov, keď sa jej opýtam na počet pravdovravných členov?

Spravme ilustračný pokus: Predpokladám, že v nejakej (hocijakej) skupine ľudí mám práve 6 pravdovravných a všetci ostatní klamú, až sa hory zelenajú. Keď sa spýtam na počet pravdovravných (ktorý viem, že je 6), aké odpovede môžem očakávať? Všetci klamári povedia čokoľvek, iba nie „6“; a iba tých PRESNE 6 pravdovravných ľudí povie „6“. Mám počet X rovnakých vyjadrení, ktoré všetky zneli:“X“. Čo z toho vyplýva? Na to, aby som člena družiny mohol považovať za pravdovravného, musí povedať také číslo, ktoré sa vyskytuje práve toľkokrát, aká je jeho hodnota.

Pozrime sa na náš prípad bačovej družiny:
1. Presne traja povedali, že traja hovoria pravdu.
2. Jeden tvrdí, že len jeden hovorí pravdu.
3. Nula ľudí (nikto) tvrdí, že nula ľudí hovorí pravdu (klamú všetci).

Keďže otázka znie, koľko najmenej klamárov tam je? Prikloníme sa k možnosti, že 3 hovoria pravdu. Najmenší počet klamárov je teda 19-3=16.

A ako by sme vedeli zistiť presný počet klamárov? Tu bola vaša fantázia neobmedzená – od návrhov opýtať sa ich, koľko je hodín, až po želanie, aby všetci pre istotu hovorili pravdu a potom by neboli zbytočné problémy – všetky kreatívne nápady boli ohodnotené.

Bodovanie: 5bodov získali naozaj len tí, ktorí nezabudli spomenúť a vysvetliť všetky tri možnosti počtov klamárov a vymysleli aj spôsob, ako ho zistiť naisto. 0,5 boda bolo za riešenie, že klamári sú minimálne dvaja.

Príklad S2: Včelí plást. *Opravovala Nina Kuklišová.*

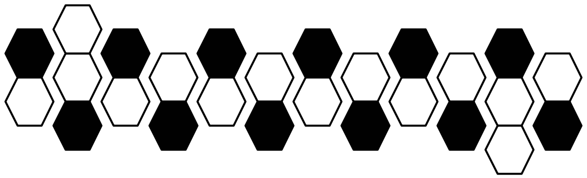
Ahojte, včelárky a včelári!

V tomto príklade bolo veľmi dôležité dať pozor na to, aby boli splnené všetky podmienky zo zadania. Poďme postupne plniť podmienky stanovené v zadaní, pričom sa stále budeme snažiť držať počet buniek čo najmenší:

1. Máme 12 chorých buniek. Nie je problém.
2. Plást nemá diery a bunky sa vždy dotýkajú jednou stenou. Dobre, tak teda pospájam mojich 12 buniek do radu.
3. Žiadne dve choré bunky nesusedia. Tak teda medzi každé dve moje choré bunky vsuniem jednu zdravú. Dostávam pás z 23 buniek, kde každá 2. je chorá.

4. Každá bunka susedí aspoň s 3 bunkami. Už tušíme, že 23 buniek nám asi nepostačí. Každá chorá bunka musí mať pri sebe aspoň 3 zdravé. Musí ale každá chorá mať „svoje vlastné“ 3 zdravé? Veď z 24 buniek pripadá na jednu chorú iba jedna „vlastná“ zdravá bunka.

Takéto rozmiestnenie vyžaduje, aby plást bol „slíž“ tvorený z jedného „radu“ zdravých buniek (nie je to celkom rad, lebo zdravé bunky sú striedavo vyššie a nižšie, ale dotýkajú sa jednou stranou), okolo ktorého budú choré bunky, striedavo na inú stranu. Takto sme využili minimálny počet buniek. Vidíme však, že choré bunky na okraji majú len 2 susedov. Preto ešte musíme na tieto kritické miesta pridať po jednej bunke – treba len dávať pozor, aby aj novo pridaná bunka mala aspoň 3 susedov. Tamtarará, máme najmenší možný plást s 26 bunkami. Takto by vyzeral - čierne bunky sú nakazené.



Bodovanie: Za korektné riešenie, ktorým ste prišli k horeuvedenému útvaru ste dostali plný počet – 5 bodov. Pokiaľ vám chýbal popis riešenia, tak ste mohli dostať najviac 3 body. Za drobné chyby v riešení ste stratili 1-2 body, a menej ako 3 body za svje riešenie dostali tí z vás, ktorí zabudli na niektorú z podmienok v zadaní, prípadne ich riešenie bolo nejasné as veľkými chybami.

Príklad S3: Vajíčka. *Opravoval Juro Pavlovič.*

Prvá, zásadná vec, ktorú si musíme ujasniť: ČO sú to „presýpacie hodiny“??? Na tomto stroskotalo viacero riešiteľov. Presýpacie hodiny sú charakterizované jediným údajom: ako dlho trvá, kým sa všetok piesok z hornej nádoby presype do dolnej. Žiadnu inú informáciu z jedných PH nezískam. PH nemajú žiadnu stupnicu/ciferík; neurčím na nich 1, 3 ani 2 minúty – IBA konečný čas, v tomto prípade 4min na jedných a 7min na druhých.

Ďalej: keď sa pýtame, koľko-minútové dokáže uvariť, odpoveď „viac ako 15min sa variť neoplatí“ nemôžeme uznať.

Otázka bola naschvál formulovaná zdanlivo nepresne a preto zvádzala k odpovedi „možností je veľa“ prípadne „je nekonečne veľa možností“ – čo, samozrejme, nie je nepravda, no úplná odpoveď na našu otázku to nie je.

Správna odpoveď by mala pokryť všetky čísla: teda buď poviem „dokáže uvariť také-a-také kombinácie a iné určite nie“ (čo by samozrejme muselo byť doplnené nejakým dôkazom, prečo také-a-také dokáže a iné nie); alebo: „dokáže uvariť koľkokoľvek-minútové vajíčka“ – a aj toto tvrdenie samozrejme dokázať.

Príklad takéhoto dôkazu:

Keď mám 4-mPH, môžem povedať, že akoby mám aj 8-mPH, nie je tak? Keď chcem 8min, nechám proste 4-mPH presypať 2 razy za sebou. A už je to jasné: 1min = 8-7 (pustím naraz obe hodiny, keď skončia 7-mPH, v 8-mPH ostáva 1min), 2min = 2x8 – 2x7 (pustím naraz obe, keď sa nejaké presypú, hneď ich zas otočím. Keď 2x PO SEBE prejdú 7-mPH, do konca 2x8 sú 2min)... 409min = 409x8 – 409x7. Takto môžem vyskladať akýkoľvek celočíselný čas.

Toto je iba príklad, existujú aj iné spôsoby, ako to dokázať.

Bodovanie: Akýkoľvek správny a úplný dôkaz, že Janko odmeria ľubovoľný čas – 5 bodov. Ukázaných niekoľko časov a vyslovený predpoklad, že to funguje pre ľubovoľný čas – 4 body. Ukázaných niekoľko časov, kde bolo vidieť nejaký systém – 3 body. Naslepo niekoľko možností, koľko minút sa dá odmerať – 2 body

Príklad S4: Záhon. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Tento príklad bol zrejme pomerne jednoduchý, keďže väčšina z vás ho vyriešila správne. Použiť sa dolo niekoľko postupov, uvediem dva, ktoré sa objavovali najčastejšie: Pre prehladnosť, majme vrcholy celého útvaru označené od A po E, štandardným značením.

Obsah trojuholníka sa počíta ako polovica súčinu dĺžky srany s výškou prislúchajucou tejto strane. Z údajov ktoré máme zadané, môžeme hneď vypočítať obsah trojuholníka ABD a to je (*4 x 3 / 2*) 6cm^2. Tiež vieme vypočítať obsahy trojuholníkov ABC a ABE (18cm^2 a 12cm^2). Oba tieto trojuholníky sa skladajú z vyfarbenej časti a trojuholníka ABD, takže obsah vyfarbenej časti celého útvaru vieme zrátať ako súčet obsahov trojuholníkov ABC a ABE, od ktorého odčítame dvakrát obsah trojuholníka ABD, teda $S = (12 + 18) – 2 * 6 = 18cm^2$

Bod D leží v strede úsečka BE a teda úsečka AD je ťažnicou trojuholníka ABE => Rozdeľuje ho na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Keďže nám ide len o obsah, môžeme trojuholníky ADE a ABD zameniť a teda obsah vyfarbenej časti počítame len ako obsah trojuhoníka ABC, teda $4 x 9 / 2= 18 cm^2$.

Obsah vyfarbenej časti útvaru je <u>18cm^2</u>.

Bodovanie: 5 bodov bolo za správny výsledok aj s presným postupom a vysvetlením. 3-4,5 boda dostávali tí, ktorí mali v riešení drobnú chybu, alebo im chýbalo nejaké vysvetlenie. 2,5 boda dostali síce správne riešenia, ale bez postupu. 0,5-2 body dostali tí, ktorí ukázali aspoň nejaký krok vedúci k správnemu riešeniu, alebo nejakú zaujímavú myšlienku/úvahu.

Príklad S5: Stuhy. *Opravoval Martin Lauko – „Logik“.*

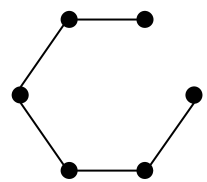
V zadaní úlohy máme jasne popísaný princíp hry, avšak konkrétny počet dievčat nie je špecifikovaný, preto musíme brať do úvahy všetky možné počty dievčat. Pre zjednodušenie vyjadrovania si označíme počet dievčat na lúke písmenom n a pôvodný počet stúh medzi nimi m.

Našou úlohou je zistiť, od čoho závisí, ktorý z chlapcov vyhrá a ktorý prehrá. Jednoduchou úvahou zistíme, že poradie v akom chlapci strihajú stuhy (ktorý z nich začína) bude mať určite vplyv na to, ktorý z nich vyhrá. Overiť si to môžeme hneď pri najjednoduchšej situácii, keď sú na lúke iba 2 dievčatá:

- tieto dievčatá spája iba jedna stuha
- jej prestrihnutím sa dievčatá rozdelia na dve nezávislé skupiny (po 1 osobe)
- z toho vyplýva, že to ktorý z chlapcov začína, určite ovplyvňuje výsledok hry

Zároveň aj počet dievčat na lúke určite zohráva dôležitú úlohu. V prípade, že by na lúke boli tri dievčatá (a teda tri stuhy medzi nimi), začinajúci hráč môže prestrihnúť ľubovoľnú stuhu a neprehrá, zatiaľ čo druhý hráč určite prehrá svojím prestrihnutím ďalšej stuhy.

Avšak, ako to vlastne funguje? Už vieme, čo ovplyvňuje výsledok hry, no nevieme celkom ako.



Poďme na to postupne – najskôr sa pozrieme na to, ako končí takáto hra. V ideálnom prípade by počet stúh pred posledným ťahom bol najmenší možný na to, aby sa dievčatá nerozpadli na dve skupiny. Tento počet je vždy o jeden menší ako je počet dievčat. Napríklad ak máme na lúke 6 dievčat, 5 stúh nám stačí na to, aby držali pohromade ako jedna skupina.

Keby sme rozstrihli hocijakú ďalšiu stuhu, dievčatá by sa rozpadli na dve skupiny. Avšak, otázkou zostáva, či pri každej jednej hre určite dostaneme do takejto situácii pred posledným ťahom. Totiž, hra môže končiť aj po 5-tom ťahu (v prípade 6tich dievčat), ak sa chlapci rozhodnú prestrihávať stuhy vedúce k jednej vybranej dievčine.