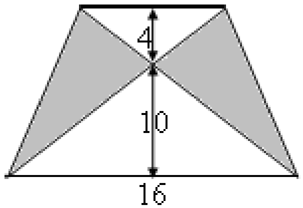
Postupne sme sa dopracovali k tomu, koľko jabĺk každý dostal. To zodpovedá aj tomu, koľko rokov mal každý pred troma rokmi. Chceme však vedieť, koľko majú v súčasnosti. Pripočítame k 4,7 a 13 ďalšie tri roky. Najmladší z bratov mal 7 rokov, stredný 10 rokov a najstarší 16 rokov.

Bodovanie: 3 body za správny výsledok, 2 body za správny postup (rovnica, deliteľnosť alebo spiatočný postup). Ak si sa dopracoval po 4, 7, 13 a zabudol si na vek v súčasnosti, máš o bod menej.

Príklad S5: Green. *Opravovala Jana „Žabka" Závodná.*

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, tu je jeden z nich:



Kedže lichobežník je rovnoramenný, vieme o ňom povedať, že je osovo súmerný, teda, že jeho pravá a ľavá strana sú rovnaké. Preto bude obsah jedného šedého trojuholníka rovnaký ako obsah druhého, teda nám stačí zistiť obsah jedného z nich.
Po spojení spodného bieleho trojuholníka (BT) s jedným šedým nám vznikne veľký trojuholník (VT), obsahy oboch vypočítame:
$S_{VT} = v_1.a/2$, kde výška v_1 je 14 (10+4) a strana a je 16. $S_{VT} = 14.16/2 = 112$.
$S_{BT} = v_2.a/2$, kde výška v_2 je 10 a strana a je 16, teda $S_{BT} = 10.16/2 = 80$.
Obsah jedného šedého trojuholníka je rozdiel VT a BT (112-80), a teda 32. Obsah neupravenej časti trávnika je teda dvojnásobok tohto čísla, teda 64.

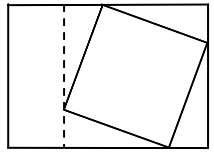
Bodovanie: Keď nič nechýbalo, samozrejme 5b, najčastejšie som strhávala za tieto chyby: ak ste príklad riešili odmeraním niektorej strany z narysovaného obrázku (2b), ak ste si odvodili hornú základňu lichobežníka ako polovicu spodnej základne (2b), ak ste riešili príklad cez podobnosť bielych trojuholníkov a pritom zabudli napísať, že sú podobné (ale zvyšok bol správne) (3b).

PIKOMAT

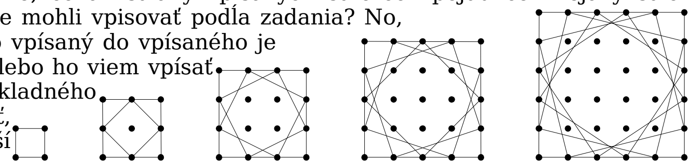
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Stromy. *Opravoval Martin „Panda" Svetlík.*

Tento príklad nebol taký ťažký. Napriek tomu si s ním mnohí z vás neporadili. Pozrime sa teda, ako mal byť správne vyriešený. Aby sme našli všetky – naozaj všetky štvorce, musíme vedieť, kde ich máme hľadať. Asi keď spojíme nejaký bod úplne vpravo s nejakým úplne vľavo, tak k nim ďalšie dva nenájdeme tak, aby tvorili štvorec...



Takže kde ich hľadať? Zoberme si ľubovoľný obdĺžnik. Dokážeme doňho vpísať štvorec (teda nakresliť taký štvorec, že každý jeho vrchol bude ležať na inej strane obdĺžnika)? Intuícia (a keď neveríme, tak to vyskúšame) nám napovedá, že asi nie. Pozrime sa na obrázok vedľa.
Nech si na strane štvorca zvolím ľubovoľný bod, viem zostrojiť práve jeden vpísaný švtorec, ktorý má jeden vrchol v tomto bode. Keby som to isté spravil s obdĺžnikom, tak logicky by mi „posledný vrchol" nevyšiel na zvyšnej strane obdĺžnika, kedže by bol na strane štvorca (samozrejme, vieme to dokázať aj lepšie, nepoviem ako, môžte na to prísť sami, pre potreby tohto príkladu nám postačí aj toto). Takže štvorce môžme hľadať len vo štvorcoch ☺. A načo sme to ziťovali? Aby sme vedeli, či máme všetky. Dôležité je, že z každého bodu na strane štvorca viem takto zostrojiť práve jeden vpísaný štvorec. Samozrejme, my budeme len v tých bodoch, kde sú stromy. Tak poďme konečne na to ☺.
Základným štvorcom budeme volať štvorec, korý má srany rovnobežné s mriežkou na ktorej tvoríme.
Najmenšie základné štvorce dostaneme, keď spojíme susedné stromy – body. Žiadna veda, viem ich dať 5 na dĺžku krát 5 na šírku, je ich teda **25**, na to ste prišli skoro všetci. A do takéhoto štvorca žiaden iný nevpíšeme pri našich podmienkach, že vrcholy ležia len tam, kde sú stromy.
Zoberme si väčšie základné štvorce – 2×2 (po 3 bodky na stranách). Opäť nič ťažké, 4 na dĺžku × 4 na šírku, je ich **16**. A do každého takéhoto štvorca viem vpísaťlen jeden štvorec – na na stranách má okrem vrcholov len po jednom strome. To je spolu **16** vpísaných.
Ešte väčšie základné štvorce majú vrcholy ob-dva stromy – každý tretí v riadku a stĺpci. Týchto štvorcov je **9**. Kedže medzi vrcholmi sú dva stromy, viem do každého vpísať dva štvorce, t.j. dokopy **18**.
Obdobne ešte väčšie základné štvorce sú **4**, majú „medzeru medzi vrcholmi" 3 stromy, a teda do nich viem vpísať *3.4 =* ***12*** ďalších štvorcov. No a najväčší základný štvorec je len **1**, a medzi susednými vrcholmi má 4 stromy a teda do neho vpíšem **4** ďalšie štvorce.
Možno vás teraz napadne, čo ak strany vpísaných štvorcov pôjdu cez nejaký strom, a teda aj do nich by sme mohli vpisovať podľa zadania? No, stalo sa to, lenže takýto vpísaný do vpísaného je buď základný štvorec, alebo ho viem vpísať aj do nejakého základného (môžte sa zamyslieť, prečo). Teda žiaden ďalší takto nevytvorím...



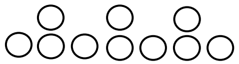
Už teda nemám kam vpisovať, a teda už ani nič nevpíšem. Takže som vo svojich úvahách obsiahol naozaj všetky štvorce. Už ich len spočítam (všetky čísla písané tučným písmom). $25 + 16 + 16 + 9 + 18 + 4 + 12 + 1 + 4 = 105$.
Vlastne ani netreba kresliť, v tom sa človek ľahko stratí, a neuvedomí si niečo, tak ako si mnohí z vás neuvedomili, že do najväčšieho štvorca môžu vpísať 4 štvorce a na dva z nich zabudli. Okrem toho, tým, že ich kreslíme, nedokážeme, či sú všetky a keby sme mali zistiť, koľko ich je v sieti *15x15*, tak to už by sme ani nezvládli kresliť, česť výnimkám ☺.

Bodovanie: 5 bodíkov sa dalo získať, ak ste našli všetkých 105 štvorcov a ukázali ste, že sú to naozaj všetky. Za opomenutie tohto dôkazu ste stratili bod, ak ste nenašli všetky alebo ste mali neúplný postup hľadania, stratili ste ďalšie bodíky.

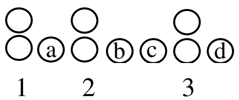
Príklad S2: Mince. *Opravovala Marta „Martuška DK“ Dravecká.*

Príklad sa dá najjednoduchšie vyriešiť tak, že začneme odkonca, teda si spravíme 5 kôpok po dvoch minciach a postupne ich rozkladáte až kým nedostanete 10 samostatných mincí. Treba si však uvedomiť, že aj jednotlivé ťahy sú „odzadu“, a teda môžeme presúvať mincu z kôpky na stôl (v „správnom“ smere je to ako položenie samostatnej mince na kôpku), ale nemôžeme hýbať so samostatnou mincou (v “správnom” smere by to bolo kladenie mince na prázdne miesto). Ideme teda v opačnom smere: nech rozkladáme akokoľvek, po prvých dvoch ťahoch nám vyjde jedna z nasledujúcich dvoch pozícii (alebo pozícia II zrkadlovo prevrátená, ale tú zatiaľ považujeme za totožnú s pozíciou II).

I



II



Z pozície I sa však už ďalej nepohneme.
Kôpky v pozícii II sa dajú rozložiť v rôznom poradí. Ak si kôpky označíme od 1 po 3 zľava doprava, vieme rozložiť 2, 3 a nakoniec 1, alebo 3, 2 a nakoniec 1, alebo 2, 1 a nakoniec 3.
Teraz sa prestavíme na „správny“ smer ☺. Z desiatich samostatných mincí sa viem dostať do pozície II tromi spôsobmi (tými, ktoré sme našli v predchádzajúcom odseku).
Z pozície II vieme poskladať 5 kôpok ôsmimi spôsobmi (samostatné mince sú označené ako *a, b, c, d*; potom $a \to b$ znamená presun mince *a* na mincu *b*: $a \to b$, $c \to d$ alebo $a \to b$, $d \to c$, alebo $b \to a$, $c \to d$, alebo $b \to a$, $d \to c$, alebo $c \to d$, $a \to b$, alebo $c \to d$, $b \to a$. Ak prekombinujeme všetky spôsoby ako sa dostať zo začiatočnej pozície do pozície 2 so všetkými spôsobmi ako sa dostať z pozície II ku piatim kôpkam (a zoberieme ešte do úvahy ich zrkadlové obrazy, čiže prvá minca sa stane desiatou, druhá deviatou, atď.) dostaneme všetky riešenia úlohy.
V riešení som sa však nepočítala s možnosťami, ktoré by obsahovali presun mince z kôpky dvoch mincí na samostatnú mincu. Týmto sa počet možností radikálne zvýši, mince by sa mohli takýmto spôsobom presúvať ľubovoľne dlho (napr. minca c by mohla preskočiť na mincu d a späť na b, potom na d, späť na b a tak ďalej).

Komentár k zadaniu: Zadanie nebolo úplne jednoznačné ohľadom preskakovania prázdnych miest. Malo to byť tak, že prázdne miesta sa môžu preskakovať pokiaľ pri tom preskočíte aj dve samostatné mince alebo kôpku zloženú z dvoch mincí. Niektorí ste nepreskakovali prázdne miesta vôbec (v tom prípade príklad nemá riešenie). Ak ste dokázali, že riešenie naozaj nemá, uznala som aj také pochopenie.

Bodovanie: 2,5 boda za jedno správne riešenie, 1,5 boda za postup, 1 bod za ostatné riešenia.

Príklad S3: Tombola. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Najskôr bolo dôležité si uvedomiť, aké číslice sa môžu vyskytnúť na jednotlivých pozíciách (na mieste stoviek, desiatok a jednotiek). Pre desiatky to boli číslice: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (deviatky a osmičky sa vyskytnúť nemôžu ani keby chceli, pretože potom už by nebola splnená podmienka zo zadania, že zvyšné dve cifry musia byť väčšie). Na mieste jednotiek a stoviek sa môžu vyskytnúť čislice: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (nulu tam dať nemôžeme, lebo potom by už nemalo čo zostať ako menšie na mieste desiatok). Teraz už len stačilo spočítať, koľko je možností pri akej cifre v strede (na mieste desiatok). Pri sedmičke je to najmenej - 2 rôzne možnosti (879 a 987), pri šestke je to už 6 možností (768, 867, 769, 967, 869, 968) a pri päťke 12 možností (657, 756, 658, 856, 659, 956, 758, 857, 759, 957, 859, 958). Ľahko si odvodíme, že pri štvorke to bude 20 možností (dvanásť tých istých, čo pri päťke + osem nových s päťkou na mieste stoviek alebo jednotiek: 546, 645, 547, 745, 548, 845, 549, 945), pri trojke to bude *20 starých možností + 10 nových* (435, 534, 436, 634, 437, 734, 438, 834, 439, 934) = *30 možností*.
Všimneme si, že vždy je počet možností zvyšovaný o dve viac ako naposledy – o štyri, o šesť, o osem, o desať...a takto to bude pokračovať. Je to preto, že vždy, keď pribudne nová číslica, tak s každou vyššou vytvorí dvakrát toľko nových kombinácií, koľko je čísel nad ňou a to bude o dve viac, ako naposledy. Pri dvojke tak získame $30+12 = 42$ možností, pri jednotke $42+14 = 56$ možností a pri nule $56+16 = 72$ možností. Keď všetky možností spočítame ($2+6+12+20+30+42+56+72$), prídeme k číslu 240.

Bodovanie: Za správny výsledok ste mohli dostať 2 body. Ak ste číslami zdôvodnili, prečo to tak je, mohli ste dostať 3,5 bodu. A keď ste pridali slovný komentár, neminul vás plný počet bodov. Ak ste postupovali správne, avšak pri závere ste urobili numerickú chybu, tak ste mohli dostať najviac 2,5 bodu.

Príklad S4: Spoločnosť. *Opravovala Lucia „Lia“ Schoberová*

Pamätáte sa na dopĺňanie do krúžkov, pred ktorými bol šípkami naznačený smer matematickej operácie a nad ňou aj operácia samotná? Daný bol iba jeden výsledok, od ktorého sa všetko odvíjalo. Tak toto je taký náš prípad. A teda počítanie odzadu. Zaručené sme mali to, že každý s bratov mal po 8 jabĺk, ako aj spôsob, akým si tieto jablká delili. Tu si bolo potrebné uvedomiť, nasledujúce. Ak jeden s bratov daruje polovicu tých jabĺk, ktoré práve má, ostatní bratia dostanú z toho jeho „jablkového majetku“ štvrtinu.
Teraz vieme, že najstarší daroval polovicu svojich jabĺk, pred tým ako mal každý po osem. To znamená presne opačnú operáciu a teda nie delenie dvojkou ale násobenie ňou, mal $8.2 = 16$ jabĺk. Stredný by mal od neho dostať jednu štvrtinu, zo 16 sú to 4 jablká, ibaže ideme opačným smerom, takže ich musíme odčítať. Tak isto budeme pokračovať aj s mladším.
Pred posledným delením mali teda takýto „jablkový stav“: Najmladší mal 4, Stredný mal 4 a Najstarší mal 16 jabĺk.
Nasleduje delenie jabĺk stredného brata. Momentálne má 4, ale polovicu chce darovať. Zase použijeme opačnú operáciu, $4.2 = 8$. Štvrtinu z toho, 2 jablká, dostane aj najstarší aj najmladší brat.
Po druhom delení mal Najstarší brat $16\text{-}2 = 14$ jabĺk, Stredný 8 jabĺk a Najmladší $4\text{-}2 = 2$ jablká.
Teraz už stačí iba spraviť delenie jabĺk najmladšieho z bratov. Samozrejme to bude s použitím predchádzajúcich pravidiel to bude vyzerať takto: Najmladší mal $2.2 = 4$ jablká, Stredný mal $8\text{-}2/2 = 7$ a ten Najstarší $14\text{-}2/2 = 13$.