Môžeme to ukázať aj inak. Predstavme si, že by sme „vystrihli a vyhodili“ naše 3 obdĺžniky a rovnostranný trojuholník, ktorý má vrcholy v stredoch hrncov. Ostali by nám tri štvoruholníky (ako AS_2XQ). Začali by sme ich „približovať k sebe“. A keďže strany, ktoré by sa dotkli, sú polomery, o ktorých sme si už dokázali, že sú rovnobežné (a aj rovnako dlhé), tak tie strany by „splynuli“ – teda neostalo by medzi nimi voľné miesto, ani by sa štvoruholníky neprekrývali. A naše tri časti kružníc by vytvorili jednu celú kružnicu.
Iným spôsobom je využitie faktu, že súčet uhlov v štvoruholníku je 360°, a povedať, že v AS_2XQ poznáme už tri uhly, 60° (pri vrchole Q, keďže veľký trojuholník je rovnostranný), 90° (pri A) a 90° (pri X), takže posledný uhol AS_2X má veľkosť 120°. A 120° je tretina plného uhla, teda celej kružnice...
Už teda vieme, že tri časti gumy dotýkajúce sa hrncov, tvoria dokopy celú kružnicu s polomerom $r = 10\ cm$, teda že spolu majú dĺžku $d = 2\pi r$. A keďže naše $r = 10\ cm$, tak je to približne 62,8cm (podľa toho, s akou presnosťou π počítame ☺). Celá guma má teda približne $60\ cm + 62{,}8\ cm = 122{,}8 cm$.

Bodovanie: Bolo treba ukázať, že obdĺžniky sú naozaj obdĺžnikmi a tretiny kružnice sú naozaj tretinami kružnice. Ak ste neukázali, že to tak je, len ste to použili, dostali ste o dva body menej. Za samotný výsledok bol ďalší bod. A za slovný popis a komentár k postupu zvyšné dva. Samozrejme, keďže nie všetci ste sa učili obvod kružnice, za správnu som považoval aj odpoveď v zmysle „60 cm + obvod jedného hrnca“.

Komentár k došlým riešeniam: Postupy využívajúce (napr. pri dôkaze obdĺžnika alebo 120-stupňového uhla) niečo ako „odmeriam si veľkosť uhla“ alebo „odmeriam si úsečku“ za veľa bodov neboli. Merania bývajú nepresné a keby neboli tie čísla také „pekné“, ďaleko by sme sa nedostali... Merať obvod kruhu už vôbec neprichádza do úvahy ako korektné riešenie. Páčil sa mi však postup jedného riešiteľa, ktorý si narysoval tri kruhy, okolo toho natiahol nitku a tú potom odmeral. A potom aj vypočítal dĺžku tej gumy. A vyšlo mu to približne rovnako (samozrejme, meranie nebolo úplne presné, nameral 123 cm). Takéto meranie nám totiž môže poslúžiť ako overenie správnosti výpočtu. Keby sme namerali 123 cm ale vyrátali napr. 91,4 cm alebo 107,1 cm alebo iný nesprávny výsledok, ktorý mnohí z vás mali, tak by sme asi usúdili, že sme rátali zle a skúsili to ešte raz. Dobrý odhad je niekedy nad zlato (napr. aj v tomto vzorovom riešení sme si najprv odhadli veľkosť uhlov 120° a 90° a potom sme dokázali, že sú také. Sám odhad by nestačil, ale vedeli sme, čo máme dokázať.)

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Loptičkožrút. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

100-hlavého draka NEMOŽNO za daných podmienok zabiť!
Pred zdôvodnením dve upozornenia:

1. Meče s danými vlastnosťami odsekávajú práve taký počet hláv, akú majú silu. Neodsekávajú teda menší počet (úloha by potom bola triviálna, keďže každý meč, ktorý odsekne viac hláv ako drakovi narastie, postupne odsekne všetky. Drak teda má šancu prežiť, ak má príliš málo hláv na použitie niektorého z mečov, alebo neprežije, ak sa dajú meče skombinovať tak, aby pred posledným úderom niektorého z nich mal práve 15, 17, 20 alebo 5 hláv.
2. Meče možno použiť v ľubovoľnom poradí a aj opakovane (slovo „poradie“ v zadaní sa vzťahovalo len na správne spárovanie počtu odseknutých hláv s počtom dorastených hláv).

Teraz ukážeme prečo draka nemožno zabiť. Použitie každého z mečov totiž v konečnom dôsledku odoberie alebo pridá drakovi niekoľko hláv. To je rozdiel hodnôt zo zadania úlohy. Lenže každý meč vytvára rozdiel, ktorý je deliteľný tromi ($-15+24 = 9$, $-17+2 = -15$, $-20+14 = -6$, $-5+17 = 12$), a teda po použití hociktorého z mečov sa nezmení zvyšok počtu hláv draka po delení tromi. Keďže pôvodný počet hláv bol $100 = 3.33+1$, stále nám bude vychádzať počet hláv so zvyškom 1 po delení tromi. Nulový počet hláv však dáva zvyšok nula po delení tromi, a teda tento počet hláv nie je dosiahnuteľný.

Bodovanie: 0 bodov za nesprávne zdôvodnenie, aj napriek správnej odpovedi. 1 bod za nesprávny výsledok pre nedodržanie 1. podmienky pre posledný sek. 2 body za správny výsledok na základe vyskúšania viacerých zmysluplných kombinácii mečov. 3 body za správnu odpoveď s náznakom dôkazu. 4 body za neúplný dôkaz správnosti výsledku. 5 bodov za správny dôkaz.

Poznámka: Niektorí z Vás napísali, že úloha nemá riešenie. Otázka v zadaní ale hovorí:„Je možné Loptičkožrúta zabiť?“ Odpoveďou na túto otázku môže byť „áno“ alebo „nie, ale odpoveď „nemá riešenie“ sa dá chápať jedine ako (aj keď vieme, že myslíte niečo iné) „nevieme, či sa dá zabiť“, čo je nesprávna odpoveď, pretože to vieme. Nabudúce sa pokúste odpovedať na otázky zo zadania, pretože aj v živote je lepšie odpovedať k veci.

Príklad S2: Vojaci. *Opravovala Anka Zahoranová.*

Mnohým sa riešenie tejto úlohy zdalo očividné, bez riadneho zdôvodnenia písali, že Tichomír je vyšší ako Bartolomej. Často sa objavovala chybná úvaha, že keď je Tichomír najnižší z najvyšších a Bartolomej najvyšší z najnižších, je medzi nimi zákonite rozdiel 90 vojakov. No je to naozaj také jednoduché? Predstavme si napríklad situáciu, keď Tichomír je najvyšší v rade samých nízkych mužov, zatiaľ čo Bartolomej je v stĺpci so samými vysokými. Nemohlo by sa stať potom, že Bartolomej je vyšší ako Tichomír?
Aké môžu nastať situácie?

Bartolomej a Tichomír sú v rovnakom rade. Keďže Tichomír je najvyšší vo svojom rade, určite platí, že Tichomír je vyšší ako Bartolomej.
Bartolomej a Tichomír sú v rovnakom stĺpci. Keďže Bartolomej je najnižší vo svojom stĺpci, určite platí, že Bartolomej je nižší ako Tichomír.
Ak stoja v rozdielnych riadkoch a stĺpcoch, všimnime si vojaka, ktorý stojí v rovnakom riadku ako Tichomír a zároveň v rovnakom stĺpci ako Bartolomej. Je určite vyšší ako Bartolomej (ten je najnižší vo svojom stĺpci) a zároveň je určite nižší ako Tichomír (ten je najvyšší vo svojom stĺpci). Čiže platí, že Tichomír je vyšší ako vojak, a ten je vyšší ako Bartolomej. Takže opäť platí, že Tichomír je vyšší ako Bartolomej.
No môžu nastať 2 špeciálne situácie. Keď sú desiati najvyšší vojaci z radov v stĺpci pod sebou, alebo keď sú desiati najnižší vojaci zo stĺpca v rade vedľa seba. Vtedy je najvyšší v rade zároveň najnižším v stĺpci, čiže Bartolomej a Tichomír by boli jednou a tou istou osobou...

Bodovanie: 5 bodov za úplne správny a zdôvodnený výsledok. –0,5 bodu, ak ste neodôvodnili, prečo je Bartolomej nižší ak stoja s Tichomírom v rovnakom riadku alebo stĺpci.
2 body, ak ste prišli na podstatu problému, že z priestorového usporiadania do štvorca vyplýva, že by možno mohli byť aj rovnako veľkí, prípadne Bartolomej vyšší... +1 bod, ak ste to vedeli overiť, keď boli v rovnakom riadku, prípadne stĺpci, no nevedeli ste to zovšeobecniť pre rôzne rady, stĺpce.
0,5 bodu za správny, no nezdôvodnený, prípadne nesprávne zdôvodnený výsledok.
0 bodov za nesprávny výsledok.

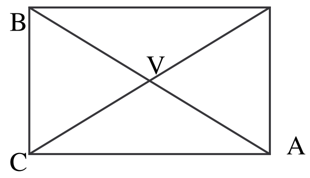
Príklad S3: Rožky. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*

Gratulujem! Takmer všetci ste tento príklad vyriešili správne. Ako sa to malo teda riešiť? Prvé, čo väčšine z vás napadlo, bolo, že Tichomír zoberie 7 zlotých a Bartolomej 5. Ale toto riešenie podľa počtu rožkov nie je správne, lebo potom by bezdomovec platil aj za rožky, ktoré si sami zjedli. Ako krajný príklad môžem uviesť, keby Tichomír doniesol 8 rožkov a Bartolomej len 4, Tak Bartolomej zje všetky svoje rožky, nikomu nič nedá a ešte dostane 4 zloté. Toto teda spravodlivé nie je.
Čo sa vlastne pri tomto obchode dialo? Môžeme si to predstaviť ako predaj rožkov tretiemu bezdomovcovi. Tichomír mu predal 3 rožky (zvyšné 4 zjedol), Bartolomej mu predal 1 rožok (zvyšné 4 zjedol). Tretí bezdomovec za to zaplatil 12 zlotých a dostal 4 rožky. Preto za každý zaplatil 3 zloté a teda Tichomír dostane 9 zlotých a Bartolomej len 3 zloté (darmo, nemal si zjesť skoro všetky svoje rožky).

Bodovanie: Za správne riešenie boli 4 body, zvyšný bod sa dal získať za kvalitu popisu (zdôvodnenia, prečo je to spravodlivé). Za náznak správneho riešenia, keď ste napísali len, že tretí bezdomovec zaplatil za každý rožok 3 zloté, boli 2 body.

Príklad S4: Zákusok. *Opravoval Jakub „Šróbik“ Sliačan.*

Tento príklad pozostával z dvoch hlavných úvah.
V prvom rade bolo treba prísť na to, ktoré dve výšky v pravouhlom trojuholníku sú vždy najdlhšie, teda ktorá je vždy najkratšia. Najdlhšie sú tie výšky, ktoré sú odvesnami pravouhlého trojuholníka, lebo najkratšia je výška na preponu. Prečo? Obsah trojuhlníku je polovica súčinu dĺžky strany a výšky ($S = a.v_a/2$). Obsah má ostať rovnaký, preto čím dlhšia strana, tým kratšia výška a naopak. A Keďže v pravouhlom trojuholníku je najdlhšou stranou prepona, výška na preponu musí byť najkratšia. A teda dve najdlhšie výšky v pravohlom trojuholníku sú práve odvesny. Až teraz teda môžme povedať, že odvesny majú dĺžky 6 cm a 8 cm.
Po druhé, bolo treba uvážiť aký vzťah je medzi trojuholníkom (prípadne pravouhlým) a jemu opísanou kružnicou. Tí z vás, ktorí poznali Tálesovu kružnicu, ľahko povedali a podporili si tvrdenie, že stred tejto kružnice je v polovici prepony daného trojuholníka. Tí, čo nepoznali Tálesovu kružnicu, mohli príklad riešiť takto. Keď si trojuholník ABC dokreslíme na obdĺžnik, tak uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú, a preto priesečník uhlopriečok V je rovnako vzdialený od vrcholov A, B aj C, a teda je stredom opísanej kružnice.

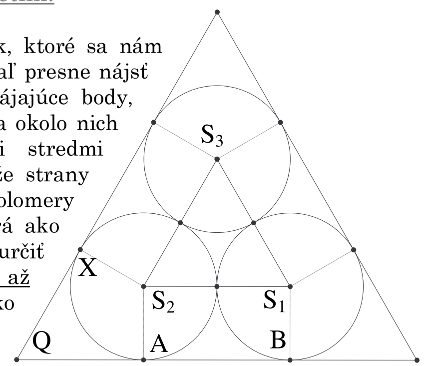


Z Pytagorovej vety vyrátame, že prepona trojuholníka má dĺžku 10 cm, jej polovica, čo je aj polomer kružnice opísanej, je teda 5 cm.

Komentár k došlým riešeniam: Rád by som zdôraznil, že narysované riešenia ako dôkaz sú neplatné. Je to hlavne preto, lebo okrem nezastrúhanej ceruzky, vôli v kružidle a vyštrbenému pravítku vašu presnosť ovplyvňuje všeličo iné. Dobre viete, že bod nemá plochu ale to čo vy narysujete ako bod, plochu má. Rysovanie je teda neslúži ako dôkaz. Okrem toho, keby vám výsledok vyšiel v pikometroch, ako by ste to odmerali?☺

Bodovanie: 1 bod za správny výsledok. 0,5 bodu za argument, že odvesny sú najdlhšími výškami a 0,5 bodu za jeho dôkaz. Za postup ako vyrobiť opísanú kružnicu bol 1 bod, ďalší 1 bod za výpočet dĺžky prepony. Zvyšný bod bol za komentár prepájajúci jednotlivé časti riešenia.

Príklad S5: Hrnce. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*



Najprv si nakreslime do obrázka pár ďalších úsečiek, ktoré sa nám zídu. Polomery kružníc do bodov dotyku (netreba zatiaľ presne nájsť tie body, je to len náčrt) a predĺžime si úsečky, spájajúce body, v ktorých sa napnutá guma dotýka hrncov a začína sa okolo nich „obtáčať“. Je teda jasné, že vzdialenosti medzi stredmi jednotlivých hrncov sú 20 cm. Ďalej vieme povdať, že strany veľkého trojuholníka sú kolmé na vyznačené polomery kružníc, s ktorými majú spoločné body. ABS_2S_1 vyzerá ako obdĺžnik. To by sa nám hodilo, vedeli by sme z toho určiť dĺžku AB. Ale <u>musíme najprv ukázať, že je to obdĺžnik, až potom to môžme použiť.</u> Keďže AS_2 a BS_1 sú rovnako dlhé (sú to polomery hrncov) a rovnobežné (zvierajú s AB ronaký uhol), tak ABS_2S_1 je rovnobežník, a keďže uhol dotyčnice s polomerom v bode dotyku je 90°, tak je to konkrétne obdĺžnik. To isté platí o ďalších dvoch. A teda všetky tri rovné časti gumy sú rovnako dlhé ako strany rovnostranného trojuholníka $S_1S_2S_3$, ktoré sú vlastne 2r, čiže 20 cm.
Už nám ostáva len zistiť, koľko merajú tie časti gumy, ktoré sa dotýkajú hrncov a obtáčajú sa okolo nich. Keď sa na ne pozrieme, vyzerajú, akoby boli každá jednou tretinou kružnice. <u>Opäť pripomínam, že sám fakt, že to tak vyzerá, použiť nemôžeme, no môžme sa ho pokúsiť dokázať, a keby to tak bolo, bolo by to už ľahké.</u> Ak nie, uvidíme, čo ďalej.☺ Nebudem to naťahovať, sú to tretiny kružnice, čo môžme ukázať viacerými spôsobmi. Napríklad si zoberme jeden hrniec, napr. ten so stredom S_2. Vidíme v ňom 4 uhly. Keďže sme si už ukázali, že útvary ako ABS_1S_2 sú obdĺžniky, tak uhly XS_2S_3 a AS_2S_1 sú pravé. A keďže trojuholník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný (všetky jeho strany majú 20 cm, ako sme si ukázali), tak všetky jeho uhly (a teda aj uhol $S_1S_2S_3$) majú 60°. A teda do 360° (do plného uhlu) nám chýba už len 120°, a tie pripadajú na zvyšný uhol – uhol AS_2X. No a 120° je 1/3 plného uhla, teda kružnicový oblúk AX (ten kratší) je tretinou kružnice. Podobne by sme zistili rovnaké veľkosti neznámych uhlov pri S_1 a S_3. Teda máme tri tretiny kružníc s rovnakým polomerom a dokopy z nich vytvoríme kružnicu.