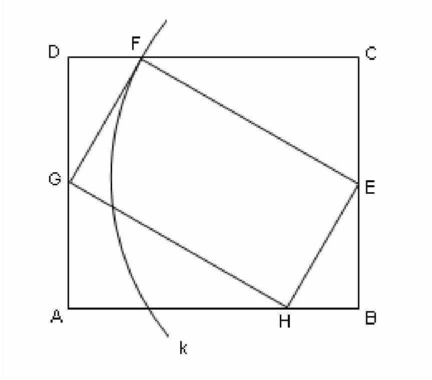
Čo ale s prvočíslami väčšími ako 50 (veľa z vás si zobralo za príklad 97)? Ich násobky sú už väčšie ako 100 a teda ich nemôžeme použiť. Keďže ide o prvočísla, nevieme ich ani vyskladať ako súčin čísel. Potom súčin v jednej skupine bude deliteľný týmto prvočíslom, a súčin v druhej nie. Takže to zákonite nemôže byť to isté číslo.Niektorí z vás postrehli problém aj s menšími prvočíslami. Napríklad 11. Spomedzi čísel 10-99 je len 9 z nich (vrátane čísla 11) jeho násobkom. Lenže keď máme mať dvakrát rovnaký prvočíselný rozklad, potrebujeme z každého prvočísla párny počet...
Teda je očividné, že takto sa 90 vojakov rozdeliť nedá. Ešte štastie, že si zavolali Statočného Orla, aby im to vypočítal. Inak by mali počas vojny veľký problém. Howgh.

**Bodovanie:** Nestačí napísať, že úloha nemá riešenie (jeden bod). Nestačí ani napísať že „Úloha nemá riešenie, lebo prvočísla.” (dva body). 5 bodov dostali len tí, ktorí dostatočne zdôvodnili, prečo úloha riešenie nemá.

## Príklad S5: Kamene. *Opravovala Kaťa Smolárová.*




Najprv v si načrtneme obrázok a uvedomíme si, čo platí. Vieme, že |BC| = |AD| = |EF| = |GH|, lebo zadanie hovorí, že kratšia strana väčšieho obdĺžnika je rovnako dlhá ako dlhšia strana menšieho. Dva protiľahlé vrcholy menšieho obdĺžnika E, G ležia v strede strán väčšieho. Na tomto obrázku je to v strede kratších strán. Body F, H by nemohli ležať v strede dlhších strán, pretože potom |FH| = |BC| = |FE| (skúste si to nakresliť), z čoho jasne vidíme, že je to nezmysel, pretože uhlopriečka obdĺžnika nemôže byť rovnako dlhá ako jedna z jeho strán.
Teraz už vieme, že náš načrtnutý obrázok je jediná možná poloha dvoch obdĺžnikov. Ako ju teraz narysujeme? Zostrojíme si úsečku ľubovoľnej dĺžky a označíme si ju BC. Nájdeme jej stred, ktorý si označíme E. Narysujeme kružnicu *k* so stredom E a polomerom |BC|. Zostrojíme kolmice na BC v bodoch B a C. Tam, kde sa nám pretne kružnica s jednou z týchto kolmíc, zvolíme bod F. Dorysovať ostatné body obdĺžnikov by už nemal byť žiaden problém. Ak by sme si zvolili bod F na druhej kolmici, tak by nám vyšlo to isté riešenie otočené o 180°.

**Bodovanie:** Tento príklad naozaj nerobil veľa problémov. Za správne narysovaný obrázok bolo 2,5 boda a zvyšok bol za postup. Za nepochopené zadanie ste mohli dostať maximálne 1,5 bodu.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

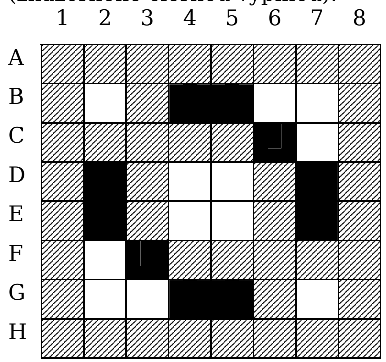
PIKOMAT, 24. ročník šk. rok 2006/2007

# PIKOMAT

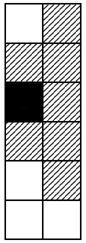
## Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

## Príklad S1: Konvoje. *Opravoval Martin „Kotanyi“ Godány.*

Na úvod si dovolím k vám, riešiteľom, prehovoriť pár teplých slov (-; V zadaní úlohy bolo napísané: „Najmenej koľko výstrelov potrebujú, aby ho zasiahli aspoň raz?“ Keď sa pýtame na čosi podobné, okrem číselnej odpovede (napr. 42) vyžadujeme aj zdôvodnenie, v odbornej terminológii zvané *dôkaz*, ktoré začína napríklad takto: „No a nemôže to byť menej, pretože blablabla.“ A za to blablabla si, pravdaže, treba dosadiť sériu nadväzujúcich tvrdení, ktoré objasňujú, z akých dôvodov to nemôže byť menej. Za dôkazy typu: „A just to tak je!“, alebo „Pozriem, vidím.“ spravidla nedostanete veľa bodov...
Možno sa pýtate, prečo som si nemohol odpustiť tento komentár. Totiž, nikto z vás neuviedol žiaden dôkaz a bolo len pár ľudí, ktorí sa k tomuto prečinu otvorene priznali. Takže som sa rozhodol nestŕhať body. Berte to ako malé bububu... nabudúce však budeme tvrdší (-:
Tak a k veci. Príklad sa skladal z troch častí. Jednak bolo treba nájsť najmenší počet výstrelov, ktorých vhodným umiestnením sme dokázali trafiť ľubovoľne umiestnený dostavník. Po druhé, bolo treba ukázať, že toto rozmiestnenie (a zodpovedajúci počet) naozaj trafí akýkoľvek dostavník. A za tretie, bolo treba dokázať, že to na menej výstrelov nepôjde...
Nebudem vás napínať. Bolo treba *aspoň* 10 výstrelov, ktoré boli rozmiestnené takto (znázornené čiernou výplňou):




Prípadne možnosť, kde boli miesto políčok C6 a F3 trafené políčka C3 a F6.
Tak to by sme mali. Teraz treba ukázať, že takto zachytíme všetky možné dostavníky. Tak – hľadajme miesta, kde sa zmestí päťpolíčková podstava nášho dostavníka. Máme? Sú to vyšrafované políčka. Predstavme si, že by sa podstava nachádzala v riadku A. Kdekoľvek by bol dostavník umiestnený, jeden z výstrelov B4 a B5 by zaručene trafil jeden z odstavajúcich výčnelkov dostavníka (výčnelky budeme odteraz volať fafáky). Podobne vidno, že dostavníky nemôžeme umiestniť ani do riadku H, stĺpca 1 a 8. Teraz sa pozrime napríklad na políčka v riadku C. Nech by sme dostavník umiestnili fafákmi dole, alebo hore, tak či tak by bol vždy jeden z fafákov trafený jedným z výstrelov D2 alebo B4. Situácia vyzerá analogicky i v riadku F a stĺpcoch 3 a 6.



Prejdime k dôkazu. Potrebujeme dokázať, že to nejde na menej výstrelov. Predstavme si štvorčekovú mriežku *2.6* a zahrajme si v nej naše dostavníky. Je jasné, že jeden výstrel stačiť nebude, pretože nech ho umiestnime kdekoľvek, dokážeme nájsť dostavník, ktorý týmto výstrelom trafený nebude (šrafovane je znázornený dostavník). Takže potrebujeme dva výstrely, ktorými iste trafíme ktorýkoľvek dostavník. Koľko štvorčekových mriežok *2.6* sa zmestí do štvorčekovej mriežky *8.8*? Áno, *2.6=12* a *8.8=64*. Takže sa ich zmestí 5, sedí vec? A každú z týchto piatich plôch musíme pokryť aspoň dvoma výstrelmi. Takže, na plochu 60 políčok (*2.6.5=60*) potrebujeme *aspoň* 10 výstrelov. Teraz hoďme okom trocha vyššie v tomto vzoráku a všimnime si vetu „... Bolo treba *aspoň* 10 výstrelov, ktoré boli rozmiestnené takto...“ A dôkaz je hotový. Vieme, že na plochu 60 políčok potrebujeme aspoň 10 výstrelov, takže na plochu 64 políčok budeme potrebovať tiež *aspoň* 10 (a my vieme, že na desať to ide...). Menej nie. Hotovo (-:

**Bodovanie:** Za správne odôvodnenie, prečo váš počet striel a ich rozmiestnenie sedí, ste dostali 1,5 boda. Zvyšné body ste dostali podľa toho, koľko ste použili striel:
10 – 3,5 | 11 – 2,5 | 12 – 2,3 | 13 – 2,1 | 14 – 1,9 | 15 – 1,7 | 16 – 1,5 | 20 – 1,3 | 22 – 1,1 | 24 – 0,9.

### **Príklad S2: Kocka.** *Opravovali Lucia „Lia“ Schoberová, Diana „Dee“ Odrobináková a Michal „Kladivo“ Kováč.*

Pri tejto úlohe si môžeme všetky kocôčky veľkej kocky, z ktorých je aspoň jedna plôška viditeľná, rozdeliť do troch skupín. Po prvé sú to kocôčky na vrcholoch, je ich spolu osem a ak vyberieme ktorúkoľvek z nich, zostanú nám viditeľné všetky tri plôšky ako pred vybratím. To znamená, že pôvodný počet plôšok sa po vybratí ktorejkoľvek z nich nezmení. Do druhej skupiny patria tie kocôčky, ktoré sa nachádzajú na hranách medzi vrcholovými kocôčkami, je ich 12 a po ich odobratí sa počet plôšok zväčší z pôvodných dvoch na štyri. Poslednú skupinu viditeľných kocôčok tvoria tie, ktoré sa nachádzajú v stredoch stien veľkej kocky. Je ich šesť a po ich odobratí sa počet plôšok zväčší z pôvodnej jednej na päť (t.j. o štyri plôšky). Z toho nám je jasné, že najvýhodnejšie bude vyberať vrcholové kocôčky. Pri prvom prerábaní nám to nerobí problémy, vyberieme päť vrcholových a úloha je čiastočne splnená. V druhom prerábaní darčeka sa však už musíme zamyslieť, zostali len tri vrcholové kocôčky a my potrebujeme vybrať ďalších päť. Odstránime teda napríklad tie tri vrcholové. Počet viditeľných plôšok na kocôčkach medzi tými vrcholovými je štyri, vybratím jednej z nich sa nám zníži na dve. Potrebujeme to ešte dorovnať jednou vybratou kocôčkou, napríklad tou v strede steny. Tá má teraz dve steny viditeľné, avšak po jej vybratí budú štyri. Toto je jedno z možných riešení, avšak kombináciami ste mohli prísť k nespočetnému množstvu iných správnych výsledkov. Tak isto ste mohli odoberať aj viac kocôčok naraz a potom nevznikali také problémy, že okrem vrcholových kociek nemôžem vybrať žiadne iné, keďže počet plôšok sa sčitoval.

**Bodovanie:** Bolo dôležité si uvedomiť, že úloha nemá len jedno riešenie, ale možností je mnoho. Plným počtom bodov boli teda ohodnotené len riešenia, v ktorých ste uviedli presný postup na získanie aspoň jedného darčeku a zároveň tvrdenie, že existujú aj ďalšie (plus náčrty). Za zvažovanie len jedného riešenia s postupom ste mohli dostať 3,5 - 4 body, za všetky správne myšlienky o kockách, ktoré treba vyrezať, bol 0,5 - 1,5 bodu. Ak ste mali len riešenie bez uvedeného postupu, mohli ste získať najviac dva body.

### **Príklad S3: Náčelníci.** *Opravoval Martin „Logik“ Lauko.*

Najskôr si všimnime, že každý náčelník mohol poznať 0 až 5 iných náčelníkov (okrem neho ich bolo 5). Nemusel poznať nikoho – vtedy poznal 0 (nula) iných náčelníkov. Všimnime si, že náčelníci poznajúci párny počet iných mohli poznať 0, 2 alebo 4 náčelníkov. *Pozor!* Aj nula je párne číslo (celé čísla sú párne, ak sú dvojnásobkom iného celého čísla – napríklad *2.0 = 0*). Práve nulu veľa z vás vynechalo, čo viedlo k jednoduchšej úlohe než sme zadali.

Rozdeľme náčelníkov do týchto skupín:
- *tajomní* – týchto nikto nepozná a ani oni nikoho nepoznajú,
- *bežní* – títo poznajú práve 2 iných náčelníkov
- *celebrity* – títo poznajú práve 4 iných náčelníkov

Všimnime si, že každý z našich šiestich náčelníkov patrí do jednej z týchto troch skupín. Ak budú v jednej z nich traja, nemáme čo dokazovať. V žiadnej skupine nebudú traja ak v každej budú najviac dvaja – teda práve dvaja, keďže spolu ich je šesť. Ukážeme, že mať 2 tajomných, 2 bežných a 2 celebrity vedie k sporu.

Okrem dvoch tajomných máme totiž 4 náčelníkov. Každý z nich môže poznať najviac troch iných náčelníkov (okrem seba a tajomných). Nikto teda nemôže poznať štyroch náčelníkov. To je spor. Práve preto nemôže nastať situácia, aby v žiadnej skupine neboli aspoň traja náčelníci.

Dokázali sme, že z podmienok zadania vyplýva, že aspoň traja náčelníci poznajú rovnaký počet iných náčelníkov.

**Bodovanie:** 5 bodov za úplný a správny dôkaz, najviac 3,5 bodu za riešenie pri zjednodušenom zadaní a 2 body za ukážku, že tvrdenie platí v konkrétnych prípadoch. Za menšie chyby mínus 0,5-1 bod.

### **Príklad S4: Delenie vojakov.** *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Rovno na začiatok si povedzme, že táto úloha nemá riešenie. Možno preto mnohých z vás odradila, a poslalo ju málo riešiteľov. Netreba sa ľakať toho, že vám niečo nevychádza, v živote sa stretnete s toľkými vecami, čo sa naozaj nebudú dať spraviť (a potom je na vás, nakoľko to vysvetlíte šéfovi, že sa to naozaj nedá ☺ ). A teraz sa začneme tváriť, že ešte nevieme, že úloha nemá riešenie, a začneme ju riešiť.
Máme 90 dvojciferných čísel. Teda všetky čísla od 10 do 99 vrátane. Chceme ich rozdeliť na dve skupiny, tak, aby sa súčiny čísel v skupinách rovnali. Teda to bude to isté číslo.
Niektorým možno teraz napadne zistiť toto číslo (tí, ktorí ste sa ešte neučili odmocniny, pokojne pokračujte až ďalším odstavcom). Matematicky to nie je ťažké, stačí nám vynásobiť všetky čísla od 10 do 99 a tento medzivýsledok odmocniť. Tu sa ale stretávame s problémom, že kalkulačka má obmedzený displej a akýchsi 76 cifier sa naň nezmestí. Keby sme však mali dostatočne veľký displej, zistili by sme, že toto číslo nie je celé, a keďže súčinom prirodzených čísel môže byť len číslo prirodzené, bolo by nám jasné, že úloha nemá riešenie. Našťastie kalkulačky nie sú všemocné, a tak pôjdeme riešiť pekne logicky :-)
Číslo, ktoré má byť súčinom zistiť nevieme, ale vieme, že každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne rozložiť na súčin prvočísel. A teda keď máme mať dvakrát ten istý súčin, tak aj jeho rozklad na prvočísla je dvakrát ten istý. No a tu narazí kosa na kameň. Niektoré čísla sú totiž samé o sebe prvočísla, teda ich prvočíselný rozklad obsahuje len dané číslo samo. Keď dáme do jednej skupiny napríklad 11, do druhej musíme dať nejaký jeho násobok, aby sme po rozložení na prvočísla mali aj v tejto skupine jedenástku.