Takže páchateľom je jednoznačne Clyde.

Bodovanie: Za správne, jasne a zreteľne vysvetlené riešenie bolo samozrejme. 5 bodov. Za správny postup boli 3 body, za správnu odpoveď+0,5 bodu. Za zlé riešenie s náznakom postupu 1 bod. Za riešenie s nesprávnou negáciou výroku „Všetko, čo hovorí Alfonz, je lož.“ (uvádzali ste „Všetko, čo hovorí Alfonz, je pravda.“) 2 body. Pokiaľ ste vychádzali z toho, že druhý a tretí Alfonzov výrok znamenajú to isté, prišli ste o jeden bod.

Príklad S5: Posledný prehráva. *Opravovala Kaťa Smolárová.*

Najprv si povedzme, o čo sme sa vlastne v tomto príklade snažili ☺. Mali sme nájsť výhernú stratégiu. To je spôsob ako hrať tak, aby sme vyhrali bez ohľadu na to, ako hrá súper.
Vieme, že ten, ktorý berie poslednú guličku, prehráva. To znamená, že keď je pred nami kôpka s 2 guličkami, tak je to *výherná pozícia (VP),* (lebo my vezmeme 1 guličku a súper musí zobrať poslednú. Podobne, kôpka s 3 guličkami je *prehrávajúca pozícia (PP),* pretože z nej musíme zobrať 1 guličku, čím sa náš súper dostane do vyhrávajúcej pozície (a to teda naozaj nechceme).
Poďme si teda najskôr nájsť všetky prehrávajúce pozície. Musí pre ne platiť, že sa z nich nedá dostať na žiadnu inú prehrávajúcu pozíciu, pretože potom by mohol súper potiahnuť tak, že my by sme sa dostali do PP. Taktiež musí platiť, že potom, ako súper potiahne, sa bude dať zo zostávajúceho počtu guličiek dostať do PP (tým pádom súpera dostaneme opäť do prehrávajúcej pozície). To znamená, že ďalšia prehrávajúca pozícia je 7, pretože zo siedmych guličiek sa vieme dostať len na počet 6, 5 alebo 4 guličky, čo sú všetko vyhrávajúce pozície (rozmyslite si, prečo to tak je). Rovnakým spôsobom zistíme, že ďalšia PP je 15 (z počtu 8-14 guličiek sa vieme dostať na kôpku so siedmymi guličkami) a posledná PP je 31 (z počtu 16-31 sa vieme dostať na kôpku s pätnástimi guličkami).
Výherná stratégia teda existuje pre prvého hráča. Na začiatku zoberie 9 guličiek a potom berie vždy toľko, aby súperovi ostalo postupne 15, 7, 3 a 1 gulička.

Bodovanie a komentár: Mnohí s vás nepochopili čo je stratégia. Ak ste to pochopili a bolo to z vášho riešenia jasné, mali ste 0,5 bodu. Taktiež ste dostali 0,5 bodu za každú objavenú prehrávajúcu pozíciu. Za to, že ste napísali, že výherná stratégia existuje pre prvého ste získali ďalší polbodík a zvyšné bodíky boli za postup.

P-MAT n.o.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Prvočísla. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*

V tejto úlohe existoval jednoznačný postup, ktorý viedol k riešeniu. Nevyskytol sa žiaden netradičný postup. Najprv bolo potrebné si uvedomiť, že čo sú to vlastne prvočísla. Číslo 1 nie je prvočíslo, ako si niektorí mysleli. Prvočíslo má vždy totiž práve dva delitele.
Potom ste zistili, že všetky prvočísla sú nepárne, okrem dvojky. V každom súčte musí figurovať aspoň jedno párne číslo, pretože neexistuje situácia, keď *nepárne číslo + nepárne číslo = nepárne číslo*. V našom súčte musí teda byť **práve** jedno párne číslo (prečo ich nemôže byť viac?). Hľadané prvočíslo (p) nemôže byť 2, lebo 2 je najmenšie prvočíslo a nedá sa zapísať ako súčet dvoch prvočísel. Takže $p=a+2$ (a je nejaké nepárne prvočíslo), z čoho $a=p-2$.
Aby mohlo byť p (ktoré je nepárne) aj rozdielom dvoch prvočísel, musí platiť $p=b-2$, kde b je nepárne prvočíslo, potom $b=p+2$. Takže treba nájsť tri prvočísla v tvare $p-2, p, p+2$.
Pozrime sa na to z hľadiska deliteľnosti troma. Ak po delení troma dáva p zvyšok 1, potom $p+2$ je deliteľné troma. Ak p dáva zvyšok 2, potom $p-2$ je deliteľné troma. Ak dáva zvyšok 0, je p deliteľné troma. Takže aspoň jedno z prvočísel $p-2, p, p+2$ je deliteľné troma.
Jediné prvočíslo deliteľné troma je 3. Potom $p-2$ musí byť 3, lebo inak by platilo $p-2=1$ (alebo -1), čo nie sú prvočísla. Jediné riešenie je teda $p=5$, čo je súčet $3+2$ a rozdiel $7-2$.

Bodovanie: Za správne riešenie boli 2 body. Za postup, v ktorom bolo dokázané, že v súčte musí byť párne prvočíslo 2, boli ďalšie 2 body. Posledný – piaty – bod sa dal získať za zvyšok postupu, v ktorom sa uvažovalo o deliteľnosti troma. Do jedného bodu som občas strhával za nedostatočný popis. Za považovanie 1 za prvočíslo som strhol pol bodu.

Príklad S2: Batožina. *Opravoval Michal Rybár.*

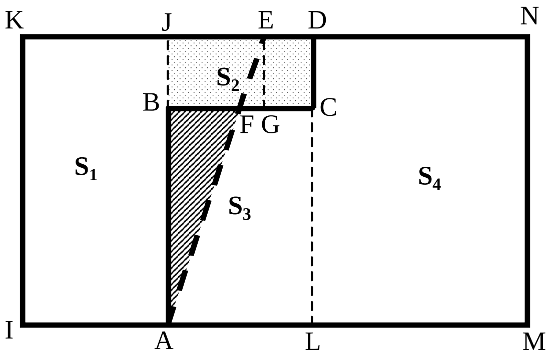
Príklad ste riešili rôzne, ale ja som vybral riešenie ktoré sa vyskytovalo najčastejšie. Ako prvý prípad si označme situáciu, keď išli Sherlock Holmes a Watson spolu. Dokopy platili poplatok za prekročenie batožinového limitu £ 3,5. V druhom prípade Holmes išiel sám s tým istým množstvom batožiny a platil £ 13,5. Rozdiel medzi týmito dvoma situáciami je £ 10 a jedna osoba (Watson). Z toho vyplýva, že batožinovému limitu na osobu zodpovedá £ 10 poplatok. Ďalej si vypočítame, koľko by sme platili, keby sme mali nad limit celých 94 libier batožiny. V druhom prípade nahradíme Holmesa £ 10 a vyjde nám, že za 94 libier nadváhy by sme platili £ 23,5. Z toho vyplýva, že za 4 libry nadváhy sa platí £ 1 poplatok. V tom prípade však £ 10 zodpovedá 40 librám váhy. Jeden človek môže bezplatne prevážať 40 a menej libier batožiny.

Bodovanie: Za správny postup ste dostali 5 bodov. Strhával som 0,5 bodu, pokiaľ niečo chýbalo alebo bolo zle napísané. Nesprávne postupy som hodnotil podľa miery ich správnosti. Za tipovanie ste dostali väčšinou len 1,5 bodu.

Príklad S3: Delenie pozemku. *Opravoval Peter „Mitec“ Miťko.*

V prvom rade: mnohí z vás sa riadili veľkosťami na obrázku v zadaní. **Obrázky v zadaniach Pikomatu sú** (ak to nie je vyslovene napísané v zadaní inak) vždy **len ilustratívne**!
Tak a teraz k riešeniu na prvý pohľad zložitej, a pritom veľmi jednoduchej úlohy. Dala sa vyriešiť viacerými spôsobmi, ja uvediem tri:

1) Pôvodné pozemky boli útvary IABCDK (vľavo) a AMNDCB (vpravo). Ich obsahy boli $S_{IABCDK} = S_{IAJK} + S_{BCDJ} = S_1 + S_2$ a $S_{AMNDCB} = S_{ALCB} + S_{LMND} = S_3 + S_4$. Ak majú ostať obsahy pozemkov nezmenené aj po ich rozdelení priamkou AE, bod E sa musí nachádzať medzi bodmi J a D. Časti pozemkov s obsahmi S_1 a S_4 preto môžu byť akékoľvek – ich veľkosti delením nezasiahneme. (Veľmi veľa z vás sa vôbec nezaoberalo tým, či majú tieto pozemky na delenie vplyv, alebo nie.) Zaujímavý je preto pre nás len obdĺžnik ALDJ. V ňom mal jeden mešťan pozemok veľkosti S_2 a druhý S_3. Ak by sa tieto veľkosti zmenili, zmenil by sa aj celkový pomer pozemkov. Preto novovzniknutý trojuholník a lichobežník musia mať tiež obsahy S_2 a S_3. Keďže vieme, že $|BC| = 24\ \mathrm{m}$, vzdialenosť CD má veľkosť 10 m a veľkosť strany AB je 30 m, tak potom dĺžka AJ bude mať veľkosť 40 m. Teraz nám už len stačí vypočítať $|DE|$. $|DE| = |DJ| - |EJ| = |BC| - 2\cdot\frac{|BC|.|DC|}{|AJ|} = 24 - 2\cdot\frac{24.10}{40} = 12\ \mathrm{m}$.



Ak by sme na to išli z druhej strany (lichobežník ALDE musí mať rovnaký obsah ako obdĺžnik ALCB), vyšlo by nám to rovnako.

2) Dalo sa na to ísť aj takto: Tým, že sme vytvorili úsečku AE, mešťan vľavo získal síce časť pozemku od mešťana vpravo v podobe trojuholníka AFB, ale tiež stratil územie tvaru lichobežníka FCDE. Ak majú mať obaja mešťania rovnako veľké pozemky ako predtým, musia sa obsahy týchto útvarov rovnať. Tu to vyjadrenie rovníc bolo o niečo zložitejšie. Jedna hovorila o rovnosti obsahov trojuholníka a lichobežníka, ďalšia o vzťahu medzi vzdialenosťami BF, FG a FC. Tá posledná, pri ktorej sa mnohí pomýlili bola, ako vyjadriť dĺžku úseku FG. Bolo potrebné vychádzať z podobnosti trojuholníkov AFB a FGE. Pričom ich pomer bol 3:1.

3) Tretia možnosť vychádzala z predpokladu, že napríklad útvar AMNDCB musí mať rovnaký obsah ako lichobežník AMNE. Keďže sme niektoré údaje nepoznali, bolo ich potrebné nahradiť premennými. Nakoniec nám z rovníc aj tak „zmizli“, čo bolo spôsobené tým istým dôvodom ako v možnosti 1).

Bodovanie: Správna odpoveď bola za 0,5 bodu. Ak ste riešili úlohu prvým spôsobom, tak za zdôvodnenie, že stačí uvažovať len obdĺžnik ALDJ, bolo 0,5 bodu. Za odôvodnenie, prečo musí mať trojuholník (lichobežník) rovnaký obsah ako prislúchajúci obdĺžnik, bolo tiež 0,5 b. Za postup bolo do dvoch bodov a za výpočet 1,5 bodu.

V druhom prípade bolo za odôvodnenie, prečo musí mať lichobežník FCDE rovnakú plochu ako trojuholník AFB, 0,5 bodu, za rovnice a výpočet 2,4 bodu a za postup 1,6 bodu.

Pri riešení treťou možnosťou bolo za výpočet a postup 4,5 bodu.

V prípade, že ste prišli na riešenie pomocou obrázku, mohli ste získať najviac 2,8 bodu.

Príklad S4: Odlomený nos. *Opravovali Katarína „Kitty“ Korcsoková a Jarmilka Malíková.*

Najjednoduchší spôsob, ktorým sa úloha dala riešiť, bola vylučovacia metóda.

1. Ak by zločin spáchal Alfonz, nastal by spor so zadaním už pri Alfonzových výpovediach, lebo by trikrát klamal (K označuje klamstvo, P pravdu):

Výpoveď č.	1.	2.	3.
Alfonz	**K**	**K**	**K**
Bonnie	P	P	P
Clyde	P	P	K

2. Ak by čin spáchal Bonnie, v oboch možných verziách tabuľky by nastal spor so zadaním, buď pri Alfonzových, alebo Clydeových výpovediach:

Výpoveď č.	1.	2.	3.
Alfonz	**P**	**P**	**P**
Bonnie	P	K	K
Clyde	P	K	P

Výpoveď č.	1.	2.	3.
Alfonz	P	K	P
Bonnie	P	K	K
Clyde	**P**	**P**	**P**

3. Ak by čin spáchal Clyde, nezáleží na tom, či Alfonz bol, alebo nebol na mieste činu. Výsledok to neovplyvní. Toto riešenie ako jediné spĺňa všetky podmienky zadania.

Výpoveď č.	1.	2.	3.
Alfonz	K	**P**	P
Bonnie	K	P	K
Clyde	L	**K**	P

Výpoveď č.	1.	2.	3.
Alfonz	K	**K**	P
Bonnie	K	P	K
Clyde	L	**P**	P