bod (to máme dokopy 2,5). Za samotný výpočet ste mohli získať tiež 2,5 bodu. Za drobné numerické chyby som strhával 0,5 až 1,5 bodu.

Príklad S5: ***Sčítance*** *opravovala Kristína Čevorová*

Jednou možnosťou je len tak skúšať rôzne sčítance. Tento postup má ale jeden problém. Nemusia sa nám podariť rozložiť všetky čísla, čo sa dajú. A keby sa nám to aj náhodou podarilo, tak nemáme dôkaz, že tie ostatné sa nedajú, čo je podstatnou časťou riešenia.
Preto je vhodné nájsť nejaký systém. Je ich viacero, napr. tento: Všimnime si, že ak sčítavame dve po sebe idúce čísla a začíname od x (napr. pri $13 + 14$, $x = 13$), tak výsledné číslo je $x+(x+1)$ a to je $2x+1$. A teraz si za x môžeme postupne dosadzovať čísla od jedna, až kým nám celkový súčet nepresiahne 31 a to je pri dvoch číslach $x = 15$, lebo pri väčších číslach stále viac a viac, teda nemá zmysel o nich uvažovať a výsledky si môžeme zapisovať do tabuľky. Podobne ak máme tri po sebe idúce čísla, môžeme si ich zapísať v tvare $x + (x + 1) + (x + 2)$ čo je $3x + 3$ a znovu skúšame x od jedna až pokým to má zmysel. Takto spočítame aj štyri sčítance, aj päť, a tak ďalej. Tie sú potom v tvare $4x + 6$, $5x + 10$, $6x + 15$, $7x + 21$. O sčítaní číselného radu dlhšieho ako sedem nemá zmysel uvažovať, pretože osem čísel vyzerá ako $8x + 28$ a ten súčet je už pri $x = 1$ priveľký. Tak to bude aj potom a aj pri dlhších radoch. Keď si pozrieme tabuľku, zistíme, že sa nám nepodarilo rozpísať 1, 2, 4, 8 a16. Keďže sme skúsili všetky rozumné možnosti, tieto čísla sa naozaj rozpísať nedajú.

Poznámka: mnohí z vás to pochopili tak, že môžeme používať aj záporné čísla. Je pravda, že zadanie to priamo nevylučovalo, preto ste za to dostali body, ale sčítance boli výšky trpaslíkov, čo používanie prirodzených čísel vcelku predurčovalo.

Bodovanie:

5	za správne výsledky s dôkazom, že 1, 2, 4, 8 a 16 sa nedajú rozpísať
4, 8	za správne výsledky s postupom, ktorý dokazuje, že 1, 2, 4, 8 a 16 sa nedajú rozpísať, ale s vynechaním nejakého menej podstatného dôkazového argumentu (napr., že viac ako 7 sčítancov nemá zmysel overovať)
2	za všetky správne určené čísla bez akéhokoľvek dôkazu
+ 0,5	za vypísanie sčítancov k tým, čo sa dajú
+ 0,5	za zistenie, že všetky nepárne okrem 1 sa dajú
+ 0,5	za zistenie, že čísla deliteľné nejakým nepárnym sa dajú, ak podiel po tomto delení je väčší ako polovica toho nepárneho čísla
+ 0,5	zdôvodnenie, že 1, 2 príp. 4 sa nedajú rozpísať
1	za ďalšie podstatné zistenia

PIKOMAT, 23. ročník školský rok 2005/2006

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 1. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Priemernú výšku *opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

V prvom rade si musíme ujasniť význam slova „*deliteľný*“, keďže niektorí z Vás napísali, že všetky čísla sa dajú deliť šiestimi (napr. $3÷6=0,5$). To je síce pravda, ale neznamená to, že to číslo je deliteľné šiestimi. Pri $a÷b=c$ je celé číslo a deliteľné celým nenulovým číslom b práve vtedy, keď ich podiel c je tiež celé číslo. To okrem iného znamená, že aj nula je deliteľná každým celým nenulovým číslom (niektorí ste písali, že nula deliteľná šiestimi nie je).

Každé celé číslo z sa dá vzhľadom na deliteľnosť šiestimi vyjadriť ako $6x+y$, pričom x je celé číslo, a y je zvyšok po delení čísla z šiestimi, a môže nadobúdať hodnoty $0, 1, 2, 3, 4, 5$ (napr. $3=6.0+3$, alebo $17=6.2+5$). Keď si zoberieme dve takéto čísla $6x+y$ a $6m+n$, tak ich rozdiel je potom $6x+y–6m–n$, čo si môžeme zapísať aj ako $6.(x–m)+y–n$.

No a keďže y a n môžu nadobúdať len jednu zo šiestich hodnôt, a trpaslíkov je sedem, vždy medzi nimi nájdeme minimálne dvoch, ktorí budú mať tieto hodnoty rovnaké, a vtedy bude $y–n=0$, a vtedy platí, že $6.(x–m)+y–n = 6(x–m)$.

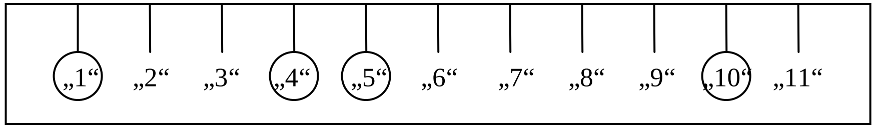
Tento výraz je deliteľný šiestimi, lebo po delení $6.(x–m)÷6$ dostaneme $x–m$, a keďže aj x aj m sú celé čísla, aj ich rozdiel bude celé číslo.

To znamená, že zo siedmych trpaslíkov dokáže náš hlavný hrdina vždy vybrať dvoch takých, ktorých rozdiel výšok bude deliteľný šiestimi; a to aj v prípade, že niektorý z nich práve podrastie o jeden centimeter (ako sa ho pýtali trpaslíci) – vždy je vždy :-)

Bodovanie: Na 5 bodov mi stačilo, keď ste napísali, že po delení šiestimi je šesť možných zvyškov, a zo siedmych trpaslíkov teda majú aspoň dvaja rovnaký zvyšok. Keď teda odčítame výšky týchto dvoch, určite získame číslo, ktoré bude deliteľné šiestimi. Za nepresnosti a nejasnosti som samozrejme nejaké bodíky strhával.

Príklad S2: ***Trpasličie pravítko*** *opravoval Peter „Pepe“ Kóša*

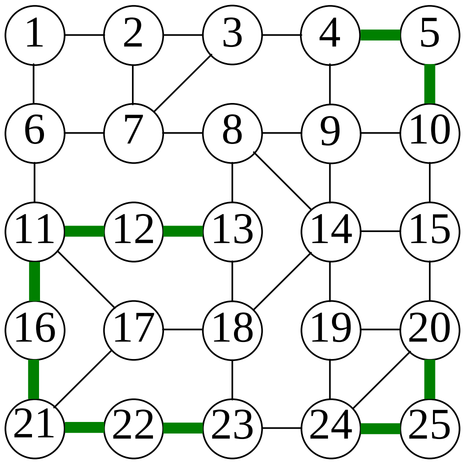
Pri tejto úlohe bolo potrebné sa na začiatku zamyslieť, ktoré dĺžky sa dajú na pravítku odmerať najťažšie. Ide logicky o najväčšie dĺžky, teda 11 cm a 10 cm. Pre odmeranie 11 cm potrebujeme mať jednu značku na „1“ alebo „11“. Pre odmeranie 10 cm zase potrebujeme značku na „1“ (ak už máme značku na „11“), „2“ alebo „10“. Ostatné značky sa už dajú doplniť relatívne jednoducho, podľa polôh už existujúcich značiek. Dokopy existuje 14 riešení, pričom 7 sa dá považovať sa originály a zvyšných 7 dostaneme prehodením existujúcich značiek podľa osi kolmej na pravítko prechádzajúcej stredom. Jedno riešenie môžete vidieť na obrázku.

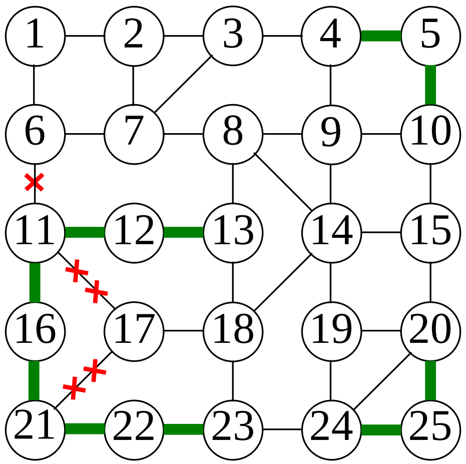


Bodovanie: Ak ste nenapísali úvahu nutnosti značiek na pozíciách „1“ alebo „11“ alebo o symetrickosti pravítok, mohli ste stratiť 0,5 bodu. Ak ste uviedli viac možností, z ktorých niektorá bola nesprávna, strácali ste 2 body za každú zlú. Celkovo bolo bodov požehnane :-)

Príklad S3: *Prechádzku cez dedinu* *opravovala Emília „Kami“ Vyslocká*

Pokúsime sa naplánovať si prechod dedinou pri zachovaní všetkých zadaných pravidiel. Všimnime si najprv domčeky 5, 12, 16, 22 a 25. V nich sa cesta dedinou ani nezačína, ani nekončí, takže nimi treba prejsť = jedným chodníčkom prísť a druhým odísť. Ale keďže do týchto domčekov vedú iba dva chodníčky, je nutné použiť oba. Pozrime si to na nákrese dediny:





Domčeky 11 a 21 sú týmto pádom jasné. Buď pôjdeme 13 → 12 → 11 → 16 → 21 → 22 → 23 alebo naopak 23 → 22 → 21 → 16 → 11 → 12 → 13. Určite ale nepoužijeme chodníčky 6 – 11, 11 – 17 ani 21 – 17 . (Prechod domčekom zabezpečujú práve dva chodníčky, ak by sme chceli použiť viac chodníčkov, porušili by sme druhé pravidlo.) Čo však s domčekom číslo 17? Vedie k nemu už iba jedna použiteľná cesta... Teda aj keby sme sa do neho dostali, nemohli by sme za uvedených podmienok odísť.

Cez dedinu sa za uvedených podmienok prejsť NEDÁ.

Bodovanie: Za samotné riešenie (= napísanie, že sa to nedá) boli dva body, za odôvodnenie tri body a to nasledovne: Ak ste upozornili, že problém nastáva niekde v okolí domčeka 17, dostali ste 1 bod. Za skúšanie možností (ak nebolo úplné) bol 1 až 2 body. Za úplné a správne vysvetlenie 3 body.

Príklad S4: Knihy *opravoval Branislav Hlubocký*

K tomuto príkladu sa dalo pristupovať viacerými spôsobmi, preto ich uvediem.

Jednou z možností bolo uvedomiť si, že keby boli všetky čísla trojciferné, existovalo by 999 možností, lebo na každú knihu by sa použilo presne trikrát toľko cifier koľko by bolo kníh. Keďže ale pri číslach 1-9 chýbajú 2 cifry a pri číslach 10-99 chýba 1 cifra, aby sa číslo dalo zapísať ako trojciferné (napr. 001 alebo 035), tak celkovo nám chýba *9.2+90.1* cifier, teda spolu 108 cifier. Preto kníh bude toľko, koľko je stoôsme štvorciferné číslo. Teda máme *999+108=1107* kníh, na ktoré bolo použitých 3321 cifier.

Ďalší spôsob spočíval v riešení rovníc pre jedno-, dvoj-, troj- a štvorciferné čísla, či platí rovnosť:

Počet cifier na očíslovanie = 3.Počet kníh

Riešenie jednotlivých rovníc neuvádzam, skúste si to sami. Čo vám má vyjsť, už viete.

Tretí spôsob bol manuálne spočítavať cifry, ktoré sme zatiaľ použili a postupne skúmať, či to už nie je práve trojnásobok. Tento spôsob je síce zdĺhavý, ale ak sa nepomýlime, tak skôr či neskôr sa riešenie dostaví.

Na očíslovanie 1 knihy potrebujeme 1 cifru.
...
Na očíslovanie 9 kníh potrebujeme 9 cifier (*9.3>9*).
Na očíslovanie 10 kníh potrebujeme 11 cifier.
...
Na očíslovanie 19 kníh potrebujeme 29 cifier.
...
Na očíslovanie 99 kníh potrebujeme 189 cifier.
Na očíslovanie 100 kníh potrebujeme 192 cifier (*100.3>192*).
...
Na očíslovanie 999 kníh potrebujeme *2700+189=2889* cifier (*999.3>2889*).
Na očíslovanie 1000 kníh potrebujeme 2893 cifier (*1000.3>2893*, ale už sa blížime, lebo *3000–2893=107*)
A keďže sa nám tento rozdiel ďalej vždy o 1 cifru zmenšuje, pri čísle 1107 bude platiť *3.1107 = počet cifier*.

Bodovanie: Za postup som dával 2,5 bodu, a to nasledovne: za náznak idei postupu 0,5 bodu, za relatívne správny postup plus ďalší bod, za úplne správny postup plus ďalší