

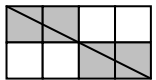
potiahne akokoľvek, vždy vieme potiahnuť späť na pozíciu s rovnakou vlastnosťou. Vždy podľa jeho ťahu dorovnáme druhú miskú tak, aby bola splnená podmienka.

Napríklad ak z (50,51) súper potiahne na (35,51), vieme to upraviť na (34,35). Teda z prehrávajúcej pozície sme dostali súpera opäť na prehrávajúcu pozíciu.

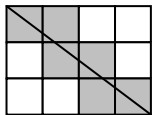
Teda už vieme, ako vyhrať: na začiatku z pozície (81,60) musíme potiahnuť na (61,60), čo je prehrávajúca pozícia. Preto (ak pozná stratégiu) vyhrá začínajúci hráč. Optimálna stratégia je teda vždy ťahať na pozíciu $(2x, 2x+1)$.

Bodovanie: Zdôvodnenie a postup hľadania 0 až 2,5 bodu, prehr. pozícia (3,2) +1 bod, konkrétne príklady +1 bod, stratégia +1,5 b.

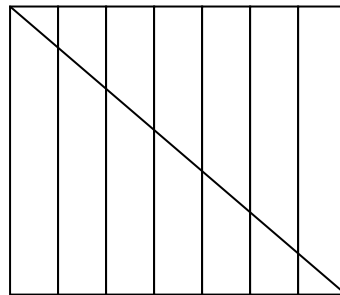
Príklad S5: Neposlušného rytiera opravoval *Miško Szabados*



Meč si samozrejme predstavujeme ako priamku, ktorá vedie z jedného rohu truhlice-kvára do protíahlého rohu. Povedzme, že stena 6x7 je bočná, 6x11 je predná a 7x11 je vrchná. Najprv si dokážeme, že meč neprechádza cez hrany kociek a to tak, že povieme, že jeho rozmery sú nesúdeliteľné, teda najmenší spoločný deliteľ 6, 7 a 11 je 1. Ak by niekde prechádzal cez hranu kocky, strany kvára by sa dali niečím vydeliť. (Úplný dôkaz je zložitejší, ale stačilo len povedať, že kvôli nesúdeliteľnosti nemôže meč cez tie hrany ísť.)



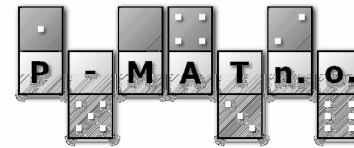
Teraz sa pozrime na úlohu zblíža. Meč prechádza cez vrstvy kociek zvrchu nadol, spredu dozadu a z boku do druhého boku. (Na obrázku je nakreslený meč a vrstvy v smere spredu dozadu z pohľadu z boku.) Vždy, keď meč prejde vrstvu, vnikne do novej kocky. Nemôže prejsť cez dve vrstvy naraz, lebo to by musel prejsť cez hranu kocky a to sme už ukázali, že sa nedá. Takže meč vnikne najprv do prvej kocky, potom ešte na výšku do ďalších piatich, na šírku do ďalších 10 a do hĺbky do ďalších 6 vrstiev. Spolu teda prejde cez $1+5+10+6 = 22$ kociek.



Neposlušný rytier bude sedieť vo väzení 22 rokov.

Bodovanie: 5 bodov za správny postup, strhával som bod za nepresné rysovanie, 0,5 bodu za to, že ste neukázali, že meč neprechádza cez hranu kocky (ak ste to používali) a nejaké ďalšie body za to, keď bol dôkaz neúplný. Podobne, dával som 0 bodov za nesprávny postup, prirátaval som bod za to, keď ste správne spočítali, koľko je vidno pretnutých kociek spredu/zboku/zvrchu a tiež nejaké body za aspoň náznak logického postupu.

Komentár: Mnohí z vás ste riešili úlohu geometricky, čo nie je zlé, ale mohlo vám to vyjsť nepresne. Preto som vám body strhával len vtedy, ak ste rysovali krivo.

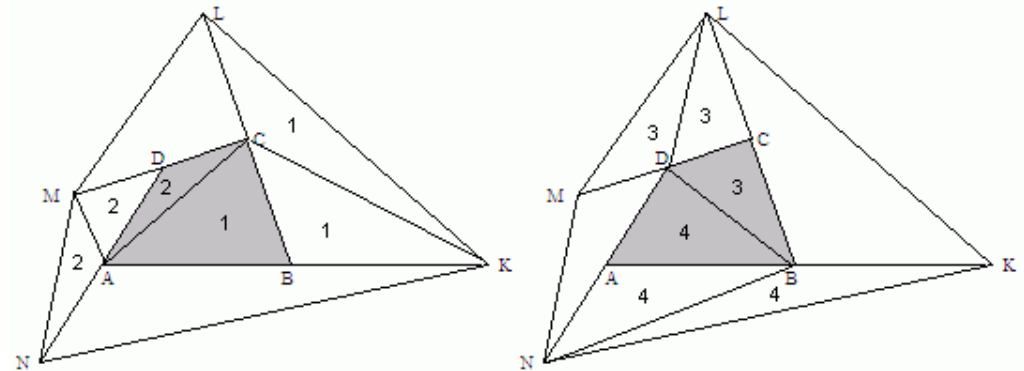


Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Skladanie stanu opravovala *Vlasta „Krupla“ Gubášová*

Štvoruholník KLMN „rozdelíme“ na trojuholníky (viď. obr.).

Trojuholníky označené rovnakými číslami majú rovnaký obsah, keďže majú rovnako dlhé strany a aj výšky na tieto strany majú rovnaké dĺžky.



Zrejme obsah štvoruholníka KLMN je súčet obsahov $(1+2) + (1+2) + (3+4) + (3+4) + S_{ABCD}$, avšak obsah ABCD je $(1+2) = (3+4)$ a teda obsah KLMN je päťnásobkom obsahu štvoruholníka ABCD.

Bodovanie: 5 bodov za správny výsledok a správny postup – zdôvodnenie zhodnosti plôch trojuholníkov. 4 body za správny výsledok i postup, malá „výpočtová“ chyba. 3 body za riešenie len pre 3 špecifické typy štvoruholníkov. 2 body za riešenie len pre 2 špecifické typy štvoruholníkov. 1 bod za riešenie len pre 1 špecifický typ štvoruholníka. 0 bodov za zlý výsledok alebo uvedenie iba výsledku bez postupu riešenia.

Príklad S2: Čarovný hríb opravovala *Anka Zahoranová*

Pôvodná dedkova výška bola 2m. Potom niekoľkokrát obehol čarovný hríb a vrátil sa na pôvodnú výšku. Je to možné? Pri obehnutí hríbu sprava n ásobne vyrastie. Naviac vieme, že sprava ho obehol aspoň raz. Pri obehnutí hríbu zľava sa $2n$ ásobne zmenší. Pozrime sa, čo takéto obehly spravia s dedovou výškou. Nech aktuálna dedova výška je h . Po obehu sprava bude $6h$, po obehu zľava $h/2$. Ak si teda celý proces predstavíme ako zlomok, tak pri obehu sprava pribudne do čitateľa číslo 6. Pri obehu zľava do menovateľa číslo 2. Preto výška $h = 2m \cdot (6 \cdot \dots \cdot 6) / (2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)$, pričom šesťka je aspoň jedna. No a teraz už môžeme smelo tvrdiť, že nastane jedna z týchto dvoch možností. Buď zlomok nie je celé

číslo, teda určite nedáva 2 metre. Alebo zlomok je celé číslo, ale potom je určite deliteľný tromi (rozmyslite si) a tiež nedáva dva metre. Dedo teda klamal.

Bodovanie: Väčšina z vás na správne riešenie prišla, problém bol ho zdôvodniť. Ak ste sa dostali k porovnávaniu mocnín 2 a 3, mohli ste dostať 4 až 5 b podľa zdôvodnenia. 4,5 b ste dostávali, keď ste zdôvodňovali cez paritu, že trojky sa delením dvojkou nezabavíte. Ak ste skúšali, mohli ste dostať 2 až 3 body. Aj za nesprávne odpovede sa dalo získať 1 až 1,5 b, ak boli aspoň nejaké myšlienky správne a zdôvodnené.

Príklad S3: Kocky opravoval Peter „Mitec“ Miško

V prvom rade by som chcel ozrejmiť pojem slovíčka „roh“. Tak ako v bežnom živote povieť, že skriňa má rohy, tak aj kocka má rohy a sú to vlastne jej vrcholy. Dosť z vás tieto pojmy považovalo za odlišné, čo následne viedlo k nesprávnemu pochopeniu úlohy.

Na to, aby sme našli správny počet možností, bolo si potrebné okrem poriadnej dávky predstavivosti nájsť aj systém. Kocka má 8 rohov a teda jej rohy môžu byť pozlátené alebo postriebrené nasledovne:

pozlátených rohov	8	7	6	5	4	3	2	1	0
postriebrených rohov	0	1	2	3	4	5	6	7	8

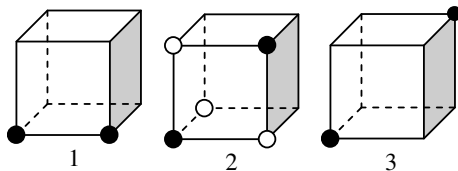
Všetko, čo platí napríklad pre 7 pozlátených rohov a 1 postriebrený, platí vlastne aj pre 1 pozlátený a 7 postriebrených, vymenili sme iba farby. Preto stačí, ak zistíme, koľko kociek vieme vytvoriť pre prvú polovicu tabuľky a potom tento počet vynásobíme dvomi. Možnosť 4,4 zarátame len raz – pozlátených aj postriebrených rohov je rovnako.

Pozlátené rohy budeme znázorňovať ako čierne kruhy. Neoznačené rohy znamenajú postriebrené.

Ak je pozlátených 8 rohov, existuje len 1 kocka.

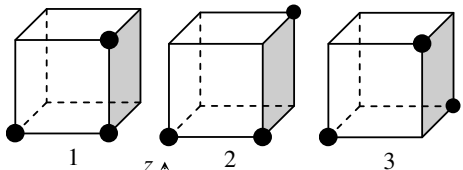
Pre 7 pozlátených a 1 postriebrený je tiež len 1 kocka – otáčaním vieme ten 1 roh zobrazit' do polôh všetkých ostatných rohov.

Pre 2 pozlátené rohy existujú len tieto 3 rozmiestnenia:



Ako sme mohli rohy zafarbovať systematicky: V kocke 1 sme zafarbili 2 rohy na dolnej hrane.

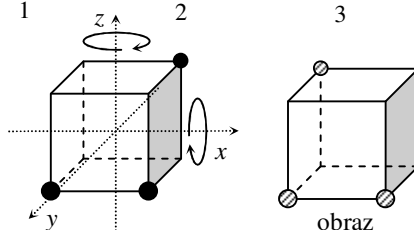
Toto bola jedna možnosť. Ľavý dolný roh sme ponechali zafarbený a hľadali sme ďalej: v kocke 2 sú bielymi krúžkami znázornené možnosti, ktoré rohy sme nemohli zafarbiť, pretože také kocky vieme vytvoriť pomocou otáčania kocky 1. Obdobne sme postupovali aj pri kocke 3.



Ak sú pozlátené 3 rohy, vieme vytvoriť znovu len 3 takéto kocky:

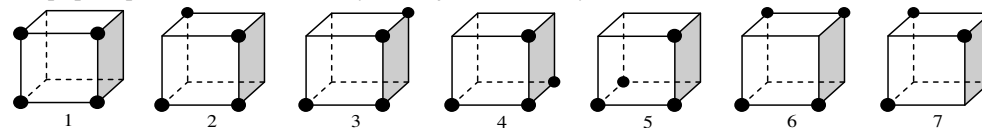
Systém hľadania rôzne zafarbených kociek je tu presne taký istý, ako keď sme mali zafarbené len 2 rohy.

Mnohí z vás uvádzali aj možnosť kocku „obraz“. Avšak vieme ju vytvoriť pomocou jej zrkadlovej predlohy – kocky 2 takto: kocku 2 otočíme o 180° okolo zvislej osi (z) a potom o 180° okolo



horizontálnej osi (x).

V prípade pozlátenia 4 rohov kocky, existuje 7 nasledovných možností:



Spolu vieme pozlátiť a postriebriť $2 \cdot (1 + 1 + 3 + 3) + 7 = 23$ kociek.

Bodovanie: Za každú kocku bolo 0,2 bodu. Za postup som dával od 0 do 0,4 bodu. Pokiaľ ste mali napísané len počty kociek a nemali ste kocky nakreslené, strhol som vám 2,3 bodu.

Príklad S4: Hru s váhami opravoval Martin „Logik“ Lauko

Tento príklad v skutočnosti nebol taký ťažký :-), ale aj tak si zopakujme, čo je dôležité vedieť.

Matematická hra je každá hra, ktorá má konečný počet pozícií. (Napríklad Hra s váhami.) Každá matematická hra má neprehrávajúcu (to znamená, že hráč s touto stratégiou neprehrá. Ak nemôže nastať remíza, existuje vyhrávajúca stratégia pre niektorého hráča) stratégiu, aj keď v niektorých hrách (napríklad šach) sme ju zatiaľ nenašli. V našej hre remíza nastať nemôže (rozmyslite si prečo).

Prehrávajúca pozícia (PP) je každá pozícia, pri ktorej hráč na ťahu nutne prehrá (ak súper hrá bezchybne, teda pozná stratégiu). Teda každý možný ťah vedie do vyhrávajúcej pozície.

Vyhrávajúca pozícia (VP) je každá neprehrávajúca pozícia, teda každá, z ktorej sa dá jedným ťahom dostať na prehrávajúcu pozíciu (nemusí to platiť pre každý ťah, stačí keď existuje jeden!). Hráč, ktorý je na ťahu na VP, vyhrá.

Stratégia je jednoznačný návod na to, ako vyhrať (teda ako ťahať a vyhrať nezávisle od toho, čo spraví súper). Stratégia existuje práve pre jedného z hráčov.

Počet mincí na váhach budeme označovať (17,34), ak je na jednej miske 17 a na druhej 34 mincí. (Na poradí nezáleží, obaja hráči môžu ťahať z oboch kôpok rovnakým spôsobom.)

Ďalšia dôležitá vec je, že všetky mince sú rovnako ťažké (ináč by takáto úloha nebola riešiteľná).

Treba si uvedomiť: Každý nedementný hráč z pozície (37,38) nepotiahne na (37,37), čo znamená jeho prehru. Preto koniec hry nastane vtedy, ak jeden hráč bude musieť ťahať z pozície (0,1).

Čo tieto veci znamenajú v našom príklade: (0,1) je PP. Hráč, ktorý ju dostane, musí potiahnuť na (0,0) a teda prehrať, lebo spôsobí rovnováhu na miskách.

Všetky pozície, z ktorých sa dá jedným ťahom dostať na (0,1) sú VP. Napr.(2,1), (3,1) alebo (2,0). Podobnými úvahami prideme na to, že aj (2,3) je PP. Preveríme všetky možnosti:

Začína sa:	A ťahá	B ťahá	A ťahá	
(2,3)	(1,3)	(1,0)	(0,0)	A prehral
	(0,3)	(0,1)		
	(2,1)	(0,1)		
	(2,0)	(1,0)		
	(2,2)	A prehral		

Ďalším skúšaním zistíme, že aj $(2x, 2x+1)$ je prehrávajúca pozícia, napr. pre $x = 1$ je to pozícia (2,3), teda pozícia, keď na jednej miske je párny počet mincí a na druhej o jednu väčší. Nech totiž súper