PIKOMAT, 23. ročník školský rok 2005/2006

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast
organizátorov seminára

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Presklený hrad *opravoval Peter „Mitec" Miťko*

Táto úloha nebola celkom jednoznačne zadaná, a preto som uznával viacero správnych výsledkov: 960, 762, 732, 432, 216 a iné. Nejednoznačnosť spočívala v tom, kde všade môžem okná umiestniť, resp. kde všade by som ich mal umiestniť.
Sú tri základné možnosti:

1. Okná dám na všetky steny vzniknutého útvaru: Jedna stena má povrch *7.7–9=40* okien. Takéto vrstvy budem teraz ukladať v troch smeroch – zhora nadol, spredu dozadu a sprava doľava. Zoberiem si napríklad smer zhora nadol (zvyšné dva sú vlastne rovnaké). Vrstiev so 40 oknami je v tomto smere 8. Okien vo všetkých smeroch je teda *3.8.40=960*. Skúste porozmýšľať, prečo to môžem vynásobiť tromi?

2. Okná dám na všetky viditeľné steny: Asi najpoužívanejší spôsob bol rozdeliť si útvar na dva typy vrstiev. Ten tu ale nebudem uvádzať. Pôjdem na to znovu cez tri smery – zhora nadol, spredu dozadu a sprava doľava. Opäť si zoberiem prvý – zvislý smer (pre ostatné dva platí znovu to isté). Týmto smerom je urobených 9 tunelov. Ak by v ostatných smeroch neboli vytvorené tunely, vytvoril by jeden tunel povrch *4.7* okien. Ale tým, že boli vyvŕtané tunely aj v ostatných smeroch, niektoré steny zmiznú. Keďže zhora nadol na prednej (zadnej) i bočných stenách sú nad sebou 3 tunely, odoberú každý v jednom smere po dve steny. Jeden tunel zhora nadol bude mať potom *4.7–3.2–3.2=16* stien (okien). Tunelov je 9 a okien je teda v tomto smere *9.16*. Vo všetkých smeroch je to *3.9.16=432*. Ešte mi chýba povrch vonkajších stien kocky – hradu. Ten je *6.40=240* (počet stien krát ich plocha). Spolu je to teda 672.

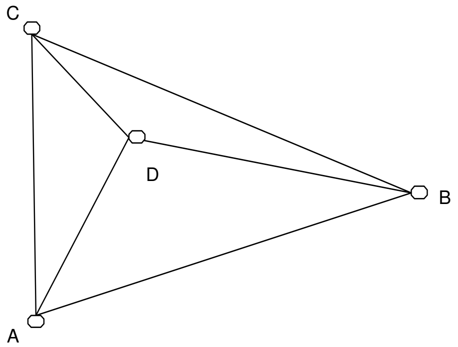
3. Ak budem umiestňovať okná len do „chodieb" – zasklievať ich. Prienikmi tunelov vznikne 27 kociek, ktoré vlastne nemajú steny. To je *27.6* okien. Takto zasklím celé vnútro. Zostáva mi už len zaskliť chodby zvonka. Na jednej stene je 9 „dier", ktoré potrebujú okno. Spolu je to teda *27.6+9.6=216* (kocky bez stien * steny + okien * stien kocky).

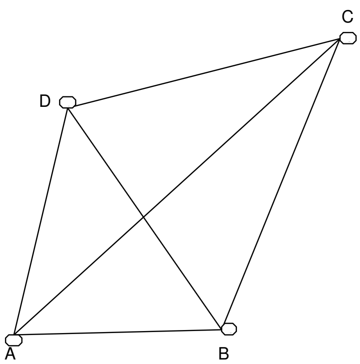
Bodovanie: Za aritmetickú chybu som strhol 0,1 bodu. Za vážnejšiu chybu som strhával od 0,5 do 1,5 bodu. Za postup zase do 2 bodov. Riešenie s odpoveďou 54 alebo 45 okien bolo za 2 body (ak ste nespravili nejakú chybu).

Príklad S2: Konáriky *opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová*

Najskôr zistíme, aký tvar by musel mať útvar s podmienkou dotykov. Konáriky (6 kusov) majú spolu 12 koncov. Ak má platiť, že každý koniec sa má stýkať s práve dvomi ďalšími koncami - tak konáriky vytvoria útvar s vrcholmi, v ktorých sa stretajú vždy práve 3 hrany. Takých vrcholov je 12:3=4.

Pri umiestnení takéhoto útvaru do roviny môžu nastať len dve situácie:





Obidve tieto situácie však majú jednu podstatnú spoločnú vlastnosť - v každom útvare sú 4 trojuholníky: ABC, ABD, BCD, ACD, ktorých strany majú mať dĺžky: 10,10,30,40,50 a 70 cm. Z týchto dĺžok podľa trojuholníkovej nerovnosti možno zostrojiť len tri trojuholníky so stranami: 30,40,50; 30,50,70; 40,50,70.

Skôr ako dokončíme dôkaz, si musíme ujasniť, že v geometrii nášho sveta platí, že vzájomné vzdialenosti medzi troma ľubovoľnými vrcholmi buď spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť alebo súčet dvoch z nich sa rovná tretej (keď tieto tri body ležia na jednej priamke). Túto vlastnosť môžeme nazvať všeobecná trojuholníková nerovnosť.

Avšak z dostupných dĺžok jednotlivých konárikov sa podľa všeobecnej trojuholníkovej nerovnosti nedajú nájsť iné kombinácie troch konárikov ako nasledujúce:

10,30,40
10,40,50
30,40,50
30,40,70
30,50,70
40,50,70

Medzi týmito trojicami je však len jediná, ktorá neobsahuje konárik s dĺžkou 40 cm. Ostatných päť trojíc môžeme zostaviť len s pomocou tohto konárika. Z podmienok úlohy však vyplýva, že každý konárik bude použitý len v dvoch trojuholníkoch (inak by sa koncami dotýkal viac ako dvoch iných koncov konárikov – viď obrázky). Výsledkom teda je, že zo všetkých dostupných trojíc konárikov vyhovujúcich všeobecnej trojuholníkovej nerovnosti nevieme vybrať viac ako tri trojice – čiže nevieme súčasne zostrojiť viac ako tri trojuholníky. Na riešenie sú však potrebné štyri trojuholníky, a teda Martinova úloha nemá riešenie.

Bodovanie:
0 bodov – Nesprávne pochopené zadanie (každý koniec konárika sa dotýka iba jedného ďalšieho konca).
1 bod – Správna odpoveď bez postupu i zdôvodnenia .
2 body – Správna odpoveď s "náznakom" zdôvodnenia alebo skúšania.
3 body – Správna odpoveď s neúplným postupom.
4 body – Správna odpoveď bez systematického postupu ,t. j. bez nájdenia "útvarov", ktoré spĺňajú podmienku "dotykov".
4,5 bodu – Správna odpoveď a postup s uvedením len jedného takéhoto útvaru.
5 bodov – Správna odpoveď a úplný postup a zdôvodnenie.

Príklad S3: Miškove kamienky *opravoval Michal „Kesy“ Kesely*

Hneď na začiatok vám prezradím, že štvorec sa Miškovi nepodarí postaviť nikdy. O tom, že to tak naozaj je, sa môžete presvedčiť nižšie.
Na začiatok však pár slov. Toto bola tretia séria a preto treba očakávať ťažšie príklady ako napríklad v sérii prvej. Tento príklad bol jedným z nich. Preto sa netreba diviť, že bodový priemer bol iba okolo 2,2 bodu, čo nie je práve najlepší priemer v histórii. Okrem toho som si povedal, že piatimi bodmi odmením len úplne správne riešenia. Preto ich je tak málo.
Tak a teraz si ukážme samotné riešenie. Dokonca dvoma spôsobmi. Ako väčšina z vás správne zistila, Miškovi sa nepodarí poskladať požadovaný štvorec. Keď si skúsite niekoľko možných štvorcov a nepôjde vám to, prepadne vás myšlienka, že to nepôjde nikdy. Takéto zmýšľanie vôbec nie je neopodstatnené, len to tvrdenie treba aj *dokázať*. Hor sa do toho.

Dôkaz číslo jedna: Tento dôkaz bude skôr založený na technike a znalostiach (čo ale neznamená, že sa naň nedá prísť aj bez toho). A pripravte sa na to, že je ťažší. Pripravení? Ideme. Takže: Miško mal 27 kamienkov a postavil štvorec 5x5, na čo použil 25 kamienkov a dva mu zostali. Zuzka mu nosí ďalšie a ďalšie, ale vždy po tri. Teda ak Zuzka išla po kamienky k krát, tak Miško mal k dispozícii $3k+2$ kamienkov, z ktorých sa snaží poskladať ďalší štvorec. Tento ak má stranu dĺžky n, tak na jeho vyskladanie treba n^2 kamienkov. Takže môžeme zostaviť rovnicu $3k+2=n^2$. To ale nie je práve najkrajšia rovnica na riešenie. Keďže však má Miško práve $3k+2$ kamienkov, vedie nás to k myšlienke použiť nejako zvyšky po delení tromi. Skúsme si predstaviť, že dĺžka strany štvorca je $3a$, kde a je vhodné prirodzené číslo. Potom jeho obsah (čiže počet kamienkov potrebný na jeho výstavbu) je $(3a)^2=9a^2$. To je ale vždy deliteľné troma, teda Miškov štvorec nemôže mať stranu dlhú $3a$. Prečo? Lebo Miško má taký počet kamienkov, ktorý po delení tromi dáva zvyšok dva. No a vieme, že číslo, ktoré by bolo naraz deliteľné 3 a dávalo zvyšok 2 po delení tromi, neexistuje.
Čo keď by mal Miškov štvorec stranu dlhú $3a+1$? Potom jeho obsah je $(3a+1)^2=9a^2+6a+1=3.(3a^2+2a)+1$. Číslo v zátvorke je určite prirodzené, a teda tento obsah dáva po delení tromi zvyšok 1. Opäť vidíme, že Miškov štvorec takýto rozmer mať nemôže (použijeme podobný argument ako vyššie).
Ešte nám ostáva prípad, že Miškov štvorec mal rozmer $3a+2$. Potom obsah štvorca je $(3a+2)^2=9a^2+12a+4=3.(3a^2+4a+1)+1$. Toto po delení tromi dáva zvyšok 1, čo znamená, že taký štvorec opäť neexistuje. Každé prirodzené číslo sa dá napísať v jednom z tvarov $3a$, $3a+1$ alebo $3a+2$, teda sme overili všetky možnosti.

Dôkaz číslo dva (alebo skôr len jeho náznak): Predstavte si, že máte štvorec o strane N. Ako z neho dostaneme štvorec o strane $N+1$? Predsa tak, že doplníme kamienky na kraj, dolu a ešte do rohu. Tých prvých je N, tých druhých tiež N, no a do rohu dáme jeden. Teda treba priložiť $2N+1$ kamienkov. Teda ak máme na začiatku štvorec $1x1$, tak potrebujeme pridať najprv tri, potom päť, potom sedem atď. kamienkov. Teda na vytvorenie štvorca NxN, potrebujeme $1+3+5+...+(2N+1)$ kamienkov. Skúste si sami ukázať, že toto číslo nikdy nedáva po delení tromi zvyšok dva.

Záver: Hľadaný štvorec neexistuje.

Poznámka: Tento dôkaz vyžaduje znalosť vzorca $(A+B)^2=A^2+2.A.B+B^2$. Na to však nie je až také zložité prísť, lebo $(A+B)^2=(A+B).(A+B)=(A+B).A+(A+B).B= =A^2+A.B+A.B+B^2=A^2+2.A.B+B^2$. Jediné, čo sa používa, je vzorec $x.(y+z)=x.y+x.z$

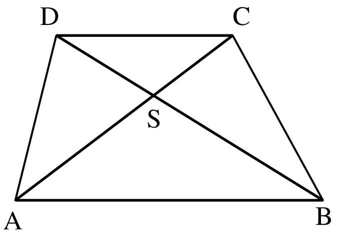
Technická poznámka: Keď máme položený len jeden kamienok, dá sa to celkom v pohode považovať za štvorec $1x1$.

Poznámky k došlým riešeniam: Opäť sa vám stávalo to, čo by sa vám stávať nemalo. To, že ukážete platnosť tvrdenia pre niekoľko prípadov („niekoľko“ môže znamenať aj dosť veľké číslo), ešte nezaručuje jeho všeobecnú platnosť. Tu by som rád citoval úspešného slovenského reprezentanta na medzinárodnej matematickej olympiáde Feriho Simančíka, ktorý pri riešení jedného príkladu povedal: „Zatiaľ to mám dokázané len pre malé čísla. Tak do sto miliónov.“ Skúste si jeho slová vziať k srdcu a snažiť sa ukázať všeobecnú platnosť:-)
Potom sa ešte vyskytli jednotlivci, ktorí taký najmenší štvorec našli. Bohužiaľ chybne. Väčšinou to plynulo z nejakej chyby pri výpočte. To potvrdzuje pravidlo: „Vyrieš, napíš, trikrát skontroluj a až potom pošli.“ Pripravujete sa tak o body, ktoré by ste inak určite mali, lebo by ste si chybu všimli a opravili ju.

No a ďalším, už pomerne tradičným, javom bolo, že niektorí z vás nepochopili zadanie. Uznávam, niekedy sa stane, že je zadanie nejednoznačné a dá sa chápať viacerými spôsobmi, ale myslím si, že teraz to tak nebolo. Zadanie bolo, podľa môjho skromného názoru, jasné. Teda ďalšie poučenie znie: „Čítajte zadania pozorne!“

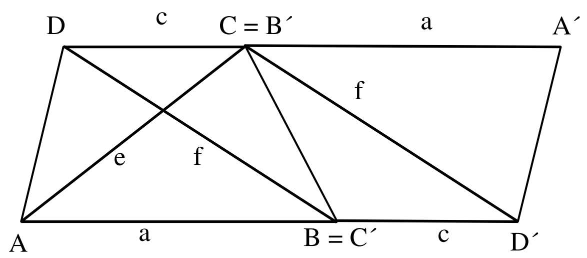
Bodovanie: Správne riešenia boli za päť bodov. Tí, čo šli cestou overovania niekoľkých možností, majú spravidla dva a pol bodu. Riešitelia, ktorí tvrdili, že taký štvorec existuje, majú okolo pol bodu.

Príklad S4: Bráničku *opravoval Martin „Panda“ Svetlík*



Ako narysovať lichobežník, ak poznáme len dĺžky základní a uhlopriečok? Nepoznáme žiadne uhly, ani výšku, ani dĺžky ramien... Mohli by sme povedať, že trojuholníky *ABS* a *DCS* sú si podobné (uhly *DSC* a *ASB* sú rovnaké, lebo sú vrcholové, a dvojice uhlov *SDC* a *SBA*, a *SCD* a *SAB* sú tiež rovnaké, lebo sú striedavé), a vypočítať si pomer ich podobnosti (je to pomer dĺžok zodpovedajúcich si strán, vypočítame ho z dĺžok základní), a v takomto pomere sa delia aj uhlopriečky nášho lichobežníka (keďže zodpovedajúce si strany trojuholníkov ležia na tej istej uhlopriečke). To znamená, že si môžeme narysovať trojuholník *ABS* (už poznáme dĺžky jeho strán), potom strany *AS* a *BS* „predĺžime“ na polpriamky, nájdeme body *C* a *D*, a máme hotový lichobežník. S týmto postupom ale môžu nastať problémy, najmä ak máme zadané „škaredé“ čísla, potom sa nám uhlopriečky delia na časti, ktoré sa ťažko rysujú. Úsečka sa síce dá rozdeliť aj graficky (a to oveľa presnejšie, ako keby sme to počítali), ale to zaberie príliš veľa času, a to nechceme...

Existuje ale jednoduchšie riešenie problému. Keď si k nášmu lichobežníku primyslíme ďalší, taký istý, len



otočený o 180°, uvidíme, že z tohto útvaru (*AD´A´D* je rovnobežník) už niečo narysovať vieme aj bez počítania. Tak napríklad môžeme začať trojuholníkom *AD´C*, v ktorom poznáme $|AD'| = a+c$, a $|AC|$ a $|CD'|$ sú dĺžky uhlopriečok *e* a *f*. Mimochodom, súčet dĺžok uhlopriečok musí byť väčší ako súčet dĺžok základní, inak by nám tento trojuholník nešiel narysovať (skúste si predstaviť lichobežník s menším súčtom dĺžok uhlopriečok...). Samozrejme na *AD´* si vyznačíme bod *B*; $|AB|$ poznáme. Potom môžeme viesť bodom *C* priamku *p* rovnobežnú s *AD´*. Potom môžeme napríklad bodom *B* viesť rovnobežku s *D´C*, a bod, v ktorom sa pretne s priamkou *p*, je bod D. Už len pospájame vrcholy a máme hľadaný lichobežník *ABCD*.

Bodovanie: Vzhľadom na to, že neboli zadané konkrétne rozmery, nemuseli ste nič rysovať. Ak ste písali zápis konštrukcie, musel byť jednoznačný. Podstatné však boli nejaké komentáre k postupu riešenia. V prípade, že postup platil len pre pravouhlý (mimochodom, ako zistíte z daných dĺžok, že je pravouhlý?) alebo rovnoramenný (to sa už

zistiť dá – má rovnako dlhé uhlopriečky) lichobežník, ste mohli dostať maximálne 2 resp. 3 body. Za postup, pri ktorom narysujete základňu, dve kružnice s polomermi o dĺžke uhlopriečok a snažíte sa dorysovať rovnobežku s prvou základňou, ktorá sa dotýka oboch kružníc a má dĺžku druhej základne, maximálne 2 body – ani pri všetkej presnosti sa nepodarí narysovať presne to, čo sme chceli.

Príklad S5: Kôl v plote *opravoval Mišo Kováč*

Ako prvé je potrebné si uvedomiť, že ak sa latka vykriví a znova narovná, je potom v pôvodnom stave. Teda ak zmení stav párny počet krát, výsledný stav bude nezmenený. Potom ak zmení stav nepárny počet krát, výsledný stav bude zmenený. Stačí zistiť počet deliteľov čísla latky okrem deliteľa 1, lebo prvý deň začali vykrivovať každú druhú latku. Ak je to párny počet, latka bude vyrovnaná, ak je to nepárny počet, bude vykrivená. Ku každému deliteľu nejakého čísla sa dá priradiť iný deliteľ tak, aby sa ich súčin rovnal pôvodnému číslu. Napríklad 12 má deliteľa 3, takže má aj deliteľa 4 (*3.4=12*). Avšak ak je to číslo druhá mocnina prirodzeného čísla, má práve jedného deliteľa takého, ku ktorému sa priradí to isté číslo, teda latka sa namiesto dvakrát vykriví len raz. Napríklad 16 má deliteľa 4 (*4.4=16*). Takže čísla, ktoré sú druhými mocninami, majú párny počet deliteľov (neráta sa deliteľ 1) a nebudú vykrivené, a ktoré nie sú druhými mocninami, majú nepárny počet deliteľov, teda budú vykrivené.
Nevykrivených latiek je 18 a sú to 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324.
Vykrivené sú tie ostatné, čiže ich počet je 315.

Bodovanie: Za správny výsledok sa dalo získať od 2,5 do 5 bodov, záležalo na správnosti postupu. Za nesprávny výsledok s dobrým postupom s nejakou drobnou chybou vo výpočte sa dali získať maximálne 4 body.