Bodovanie: 2 body za správny výsledok, 3 body za kompletný postup. Za chýbajúce detaily som strhol 0,2b, za väčšie nejasnosti 1b dolu. Pokus o postup – t.j. začatý, ale nedotiahnutý – som hodnotil 0,5 – 1,5 bodmi.

Príklad S5: Bosorkinu mrkvu *opravoval Jakub Kubus Závodný*

Úloha sa nám bude najlepšie riešiť, keď si namiesto semienok predstavíme už dospelé mrkvy. Tieto mrkvy budú vlastne kruhy s polomerom 1 meter so stredmi v semienkach. Podmienky v zadaní nám vlastne hovoria, že žiadna mrkva nemôže vytŕčať von zo záhrady a dve mrkvy sa nemôžu prekrývať. Najjednoduchším riešením je asi poukladať mrkvy vedľa seba do radov. Do jedného radu dlhého 20 metrov sa zmestí 10 mrkiev vedľa seba. Ak tieto rady budeme ukladať priamo pod seba, do záhrady ich zmestíme 10, čo spolu dáva 100 mrkiev. Za takéto riešenie ste mohli dostať 2,5 boda.

Ukladať rady pod seba však nie je úplne najlepšie. Všimnime si, že medzi mrkvami sú ešte dosť veľké medzery, ktoré by sme mohli zaplniť tak, že by sme rady ukladali striedavo – aby každá mrkva bola akoby „medzi“ dvoma mrkvami z predchádzajúceho radu. Takto sa nám do záhrady zmestí viac radov, každý druhý však bude mať iba 9 mrkiev.

Vzdialenosť dvoch susedných radov semienok vypočítame ako výšku rovnostranného trojuholníka so stranou 2 metre, ktorého vrcholy tvoria tri susedné semienka. Podľa Pytagorovej vety:

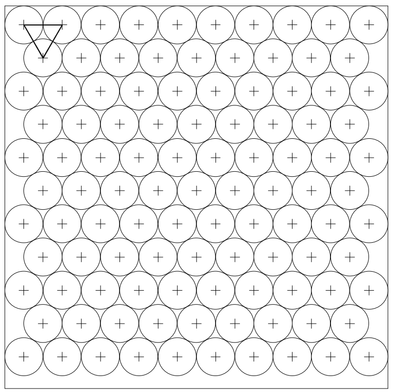
$$v^2 + 1^2 = 2^2$$
$$v^2 = 3$$
$$v = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

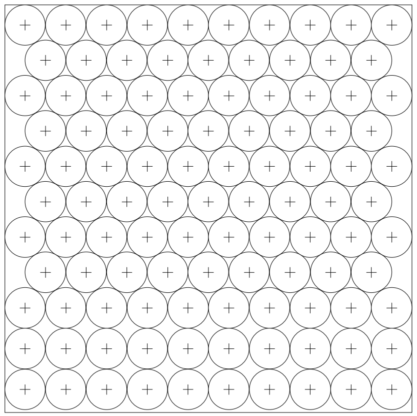
Ak budeme mať v záhrade R takýchto radov, do 20 metrov šírky záhrady sa musí zmestiť (R – 1) medzier medzi radmi plus meter pred prvým a za posledným radom. Preto

$$(R - 1).\sqrt{3} + 2 < 20$$
$$(R - 1).\sqrt{3} < 18$$
$$R < (18 / \sqrt{3}) + 1 \approx 11{,}39$$

Radov môže byť maximálne 11. V každom druhom rade bude 9 mrkiev, v zvyšných bude 10, čo je spolu 5.9 + 6.10 = 105 mrkiev (obrázok č. 2). Za takéto riešenie som dával 4 body.Všimnime si však, že na kraji záhrady nám zostal pásik nevyužitého miesta. Nezmestí sa nám sem ďalší rad, ale môžeme posledný rad posunúť tak, aby sa do predposledného radu zmestilo 10 semienok namiesto 9. Naozaj, takto budú mrkvy zaberať 8 medzier medzi striedavými radmi + 2 medzery medzi 10mrkvovými radmi + 1 meter na každom konci = 8 . $\sqrt{3}$ + 2 . 2 + 2 . 1 ≈ 19,86 m, čo sa ešte do záhrady zmestí. Podobným výpočtom zistíme, že ďalší 9-semienkový rad už na 10 semienok predĺžiť nemôžeme (pri zachovaní počtu radov!). Takýmto spôsobom teda bosorka dokáže nasadiť až 106 semienok.

Bodovanie: Nejaké tie body ste mohli stratiť na závažných chybách alebo nedostatkoch v zdôvodnení, prečo sa podľa vášho rozostavenia mrkvy do záhrady naozaj zmestia.





PIKOMAT ,**22. ročník** **šk. rok 2004/2005**

P-MAT n. o.

organizátor korešpondenčného seminára

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 1. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: ***Nevestu a jej obrúčky*** *opravoval Peter Mitec Miťko*

$14 + 5A + 10B + 10C + 5D - 5(u + v)$					
$7 + 4A + 6B + 4C + D - 5u$	$A + 4B + 6C + 4D + 7 - 5v$				
$7 + 3A + 3B + C - 5r$	$A + 3B + 3C + D - 5s$	$B + 3C + 3D + 7 - 5t$			
$7 + 2A + B - 5n$	$A + 2B + C - 5o$	$B + 2C + D - 5p$	$C + 2D + 7 - 5q$		
$7 + A - 5j$	$A + B - 5i$	$B + C - 5k$	$C + D - 5l$	$D + 7 - 5m$	
7	**A**	**B**	**C**	**D**	7

Najťažšie v tomto príklade bolo určiť, **prečo** sa na vrchole pyramídy bude vždy nachádzať číslo 4. S tým súvisel aj dôkaz, že to inak byť nemôže. Zistime si najprv aký zvyšok dostaneme, ak sčítame napríklad premenné *A* a *B*, ktoré vyjadrujú ľubovoľné prirodzené čísla. Na to, aby sme to mohli spraviť, potrebujeme ešte zistiť, ako by sme mohli zapísať ľubovoľné číslo vydelené 5. Ak je *E* ľubovoľné číslo, tak po vydelení 5 nadobudne tvar: $5k + x$, kde *k* je podiel (nejaké prirodzené číslo) a *x* je zvyšok. Pre lepšiu názornosť je tu konkrétny príklad: Ak $E = 13$, potom *k* bude 2 a *x* zase 3.

Súčet premenných *A*, *B* je tiež len číslo a preto ho môžeme dosadiť za premennú *E*. $E = A + B = 5i + z$. Avšak do krúžku nad premennými *A* a *B* máme zapísať len zvyšok, čiže $A + B - 5i$. Pyramída bude potom vyzerať takto:

Do najvrchnejšieho políčka som zámerne dal člen $(u + v)$ a nenahradil som ho napríklad premennou *w*, pretože som horné políčko ešte nevydelil 5 a neurčil zvyšok. Ak to spravím, tak je myslím celkom jasné, že jediný člen, ktorý nie je deliteľný 5 bezozvyšku, je číslo 14. To je dôvod, prečo dostaneme pri tejto pyramíde v najvrchnejšom krúžku vždy číslo 4, pričom nezáleží na ostatných štyroch číslach v dolnom riadku. Dalo sa to dokázať aj trošku inak, ale princíp by bol vždy ten istý.

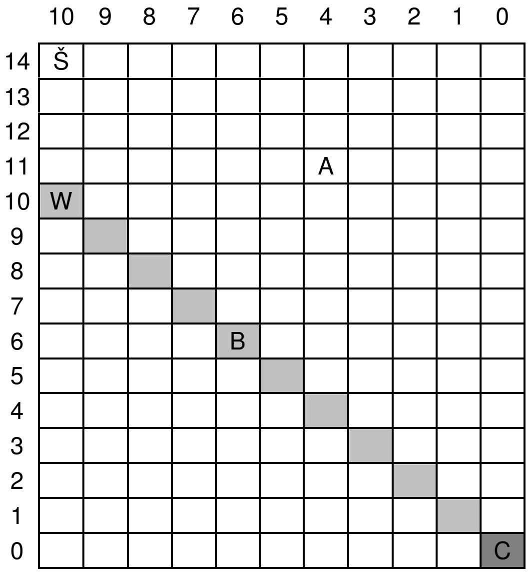
Bodovanie: Za správny výsledok som dával 0,5b. Ak ste nakreslili alebo popísali, ako ste vytvárali čísla v trojuholníku, dostali ste od 0 do 1b. Od 0 do 2,3b ste získali, ak ste ukázali a zdôvodnili niektoré zo zaujímavých vlastností, ktoré platia v pyramíde. Ak ste využívali poznatok, že nám stačí určiť zvyšok až na koniec, ale neukázali ste prečo to môžeme spraviť, stratili ste do 0,8 bodu.

Príklad S2: ***Šachovnicu*** *opravovala Vlasta Krupla Gubášová*

Najskôr upozornenie pre tých, ktorí nesprávne pochopili zadanie: „Hru hrajú dvaja hráči, ale len s jednou - spoločnou figúrkou, ktorou ťahajú striedavo. Teda neťahajú každý svojou figúrkou nezávisle od seba.“

Teraz – čo znamená pojem „víťazná stratégia“ ? Víťazná stratégia je „návod, predpis, recept, ...“ ako postupovať k zaručenému víťazstvu. Keďže vyhrať môže len jeden, víťazná stratégia existuje najviac pre jedného hráča. Chybné alebo „nepozorné“ ťahy do víťazného postupu nepatria – každý hráč sa snaží hrať najlepšie ťahy a víťazná stratégia znamená, že ani najlepšie ťahy súperov nezabránia „majiteľovi“ víťaznej stratégie vo víťazstve. Ak „majiteľ“ víťaznej stratégie urobí chybu (alebo „nepozornosť“) potom samozrejme môže prehrať – neznamená to však, že neexistuje víťazná stratégia – znamená to len, že tento hráč nedokázal dôsledne postupovať podľa víťaznej stratégie. Skôr, než uvedieme presnú víťaznú stratégiu a odôvodnenie jej správnosti, pouvažujeme nad podstatou toho, aký je motív tejto stratégie.

Najdôležitejšou úvahou je uvedomenie si, že políčka hracej plochy majú od cieľa istú vzdialenosť. Cieľové políčko C má samo od seba vzdialenosť 0. Každé ďalšie políčko má takú vzdialenosť, ktorá odzrkadľuje koľko riadkov a koľko stĺpcov musíme prejsť aby sme sa dostali do cieľa. Takže napríklad políčko označené na obrázku ako A má vzdialenosť (11;4) (11 riadkov a 4 stĺpce) a políčko označené B má vzdialenosť (6;6) (6 riadkov a 6 stĺpcov). Štartovné políčko Š, na ktorom ležala figúrka na začiatku hry má teda súradnice (14;10).
Ďalšou dôležitou úvahou je porozumenie tomu, že cieľové políčko C má obidve čísla v takto meranej vzdialenosti rovnaké.



Ten hráč, ktorý chce vyhrať (volajme ho Napoleon), by sa mal snažiť aby políčka na ktorých skončí figúrka po jeho ťahu mali obe súradnice rovnaké. Ak totiž dokáže zabezpečiť, aby po každom jeho ťahu boli obe súradnice rovnaké, zrejme musí vyhrať. Prečo ? Na to prídete ľahko aj sami, stačí si uvedomiť ako bude Napoleon reagovať na ťah súpera.

Týmto sme našli aj úplné odôvodnenie víťaznej stratégie – vyhrá ten hráč, ktorý dokáže od svojho prvého ťahu umiestňovať figúrku na políčka s rovnakými súradnicami. Ak totiž Napoleon raz obsadí takéto políčko, potom jeho súper nemôže sám obsadiť podobné políčka – pravidlá hry ho totiž nútia aby figúrku presunul aspoň o jedno políčko v riadku alebo v stĺpci a teda MUSÍ OPUSTIŤ políčko s rovnakými súradnicami, čím Napoleonovi znovu umožňuje aby symetrickým posunom obsadil políčko s rovnakými súradnicami – avšak bližšie k cieľovému políčku.
Odpoveď na úlohu teda znie: Prvý hráč si dá meno Napoleon, potom prvým ťahom potiahne figúrku na políčko W (ako Waterloo) ležiace na súradnici (10;10) a v každom svojom nasledujúcom ťahu vráti figúrku na “uhlopriečku” WC ležiacu medzi políčkom W a cieľovým políčkom C. Z vyššie uvedených úvah vyplýva, že takýto postup je pre neho vždy možný a dovedie ho až na cieľové políčko.
Bodovanie: 1 bod bol za aspoň jednu správnu úvahu o taktike postupu, 2 body boli za aspoň dve správne úvahy o taktike postupu alebo dva príklady postupu s náznakom správnej stratégie, 4 body boli za malé nejasnosti v riešení ohľadne víťaznej stratégie, alebo v zdôvodnení.

Príklad S3: ***Postupnosť*** *opravoval Matej Bendži Bendžala*

Napíšme si postupnosť čísel. Prvé číslo je 9, druhé nepoznáme, označme si jeho hodnotu x. Keďže súčet prvej trojice čísel má byť 20, tak tretie číslo musí byť: 20-9-x=11-x. Tiež súčet druhého, tretieho a štvrtého čísla má byť 20, čiže štvrté číslo je: 20-x-(11-x)=20-x-11+x=9.

Ďalšia, tretia trojica v poradí má mať už súčet 22. Tretie, štvrté a piate číslo majú teda súčet 22, čiže piate číslo je: 22-(11-x)-9=2+x. Šieste: 22-9-(2+x)=11-x. Siedme: 20-(2+x)-(11-x)=7. Osme: 20-(11-x)-7=2+x. Deviate: 22-7-(2+x)=13-x

<table>
<tr><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>13.</td><td>14.</td><td>15.</td><td>16.</td></tr>
<tr><td>**9**</td><td>**x**</td><td>**11-x**</td><td>**9**</td><td>**2+x**</td><td>**11-x**</td><td>**7**</td><td>**2+x**</td><td>**13-x**</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Podľa zadania je deviaty člen postupnosti číslo 7. Ak je druhý člen x, tak potom deviaty je 13-x, z toho vyplýva, že x, čiže druhý člen musí byť 6, lebo 13-x=7, čiže x=6. Tabuľku teda prepíšem dosadením 6 namiesto x, a doplním aj ďalšie čísla postupnosti, podľa pravidla o súčte trojíc (vždy ďalší člen je daný predošlými dvoma, ktoré poznáme, a súčtom 20 alebo 22)

<table>
<tr><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>13.</td><td>14.</td><td>15.</td><td>16.</td></tr>
<tr><td>**9**</td><td>**6**</td><td>**5**</td><td>**9**</td><td>**8**</td><td>**5**</td><td>**7**</td><td>**8**</td><td>**7**</td><td>**7**</td><td>**6**</td><td>**7**</td><td>**9**</td><td>**6**</td><td>**5**</td><td>**9**</td></tr>
<tr><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td><td></td><td colspan="3">**20**</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td colspan="3">**22**</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teraz by sme vedeli určiť postupnosť až po 2005. člen. Zjednodušíme si úlohu, ak si všimneme, že trojica čísel 9, 6, 5 na prvom, druhom a treťom mieste je zhodná s trojicou na trinástom, štrnástom a pätnástom mieste, navyše tiež na obe tieto trojice pripadá prvá z dvoch dvadsiatok v opakujúcej sa postupnosti súčtov trojíc, preto môžme tvrdiť, že od 13. miesta sa zopakuje opäť prvých dvanásť čísel, a budú sa opakovať neustálne v postupnosti spolu s opakovaním sa súčtov trojíc 20, 20, 22, 22,...

Keď už vieme, že v postupnosti sa opakuje 12 čísel, zistíme koľko krát sa zopakujú do 2005. člena. 167krát12=2004, čiže zopakujú sa 167 ráz, a do 2005 chýba ešte jedno číslo – prvé z postunosti – 9. Dvetisícpiaty člen postupnosti bude teda deväť. Súčet prvých 2005 členov je 167 krát súčet opakujúcich sa dvanástich plus deväť, čiže 167x84+9=14 037
Bodovanie: Za postup a za zdôvodnenie bolo dokopy 5 bodov. Zdôvodnenie opakovania sa týchto 12 čísel mnohí v postupe neuviedli, za to bol odrátaný 1 bod.

Príklad S4: ***Kto je kto*** *opravoval Peter Comp Ambrož*
Máme 4 výroky, 1. a 3. patrí jednému bratovi (nazvem ho „prvý“), 2. a 4. patrí druhému bratovi („druhý“). Na začiatok zistím, že druhý klame. Tvrdí totiž, že: „Dnes je pondelok“, „starý otec včera klamal“. Ak by mal pravdu, znamenalo by to, že starký klamal v nedeľu, čo je v spore so zadaním (v nedeľu nikto neklame). Keď už viem, že druhý klame, je jasné, že prvý hovorí pravdu. Niet takého dňa, kedy by klamali obaja zároveň. Prvý hovorí pravdu, takže dnes nie je nedeľa . Druhý klame, takže nie je ani pondelok (vyplýva z 2. výroku). Tretie tvrdenie mi hovorí, že Ľudovít bude zajtra klamať. Zatiaľ neviem, podľa ktorého starého rodiča klame, ale viem, že v nedeľu nikto neklame, preto dnes nie je sobota. Ostali mi tieto možné dni: utorok, streda, štvrtok, piatok. Zoberiem si posledný výrok: „Starý otec včera klamal“. Viem, že ho vyslovil klamár, preto si ho musím upraviť: „Starý otec včera hovoril pravdu“. Starý otec hovorí pravdu vo štvrtok, piatok, sobotu a v nedeľu. Z toho pre dnešný deň vychádzajú piatok, sobota, nedeľa a pondelok. Sobotu, nedeľu a pondelok som vylúčil, takže ostal piatok. V piatok klame stará mama, takže druhý je ako starká. Tretí výrok hovorí, že Ľudovít v sobotu klame, z čoho vyplýva, že Ľudovít klame ako starká a je druhý. Prvý je František, klame ako starý otec. Celý rozhovor sa udial v piatok.