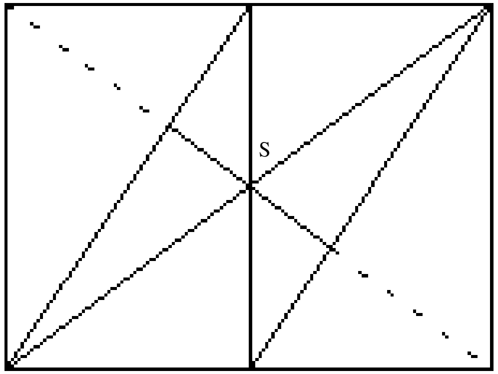


Teda plocha jedného štvoruholníka je polovica z plochy kosodĺžnika a to a.b/2, čo sa rovná ploche jedného trojuholníka.
Bodovanie: Za postup boli dokopy 3 body, za zdôvodnenia zvyšné 2 body.

.

Príklad S5: Deti z hradu *opravoval Peter Peťo Halák*
Jednoduchým riešením úlohy bolo riešenie, že sa medzi deťmi mohli vyskytovať aj dvojice (v zadaní takáto možnosť nebola vylúčená). Teda stačilo nájsť 5 vyhovujúcich vekov a úloha bola vyriešená – napr. 1,1,2,2,4,4,5,5,10. Trojičky nemohli byť, keďže priemer dvoch by bol vek tretieho. Dala sa ale nájsť aj možnosť, že nebude žiadna dvojička.
Zo zadania vieme, že veky detí boli od 1 do 20. Ak nemá byť v žiadnej trojici dieťa, ktorého vek je aritmetickým priemerom vekov zvyšných dvoch, tak sa nemôže medzi vekmi detí nachádzať postupnosť. Pod postupnosťou rozumieme napr. 2,3,4 alebo 10,11,12, ale aj 2,4,6, alebo 7,10,13, t.j. také čísla, medzi ktorými sú rovnaké rozdiely (múdro napísané n-d, n, n+d). Priemer párneho a nepárneho čísla je desatinné číslo. Pri skúšaní teda netreba kontrolvať priemery takýchto čísiel, stačí skontrolovať priemery všetkých dvojíc párnych, resp. nepárnych (navzájom netreba). Začneme teda postupne skúšať od 1, 2. Zistíme, že 3 nemôže byť, keďže (1+3):2=2. Ideme ďalej, zistíme, že 4 aj 5 môžu byť – nevytvárajú žiadny priemer. Potom prídeme na to, že 6,7,8,9 nevyhovujú, keďže vznikne priemer s niektorým už použitých čísiel. Takto postupujeme ďalej, až prídeme na to že vyhovujú iba 1,2,4,5,10,11,13,14. Teda jedno číslo nám chýba. Čo ďalej? Vrátime sa na začiatok a budeme postupne skúšať všetky iné možnosti. Alebo nás ešte môže „napadnúť" celkom logická myšlienka – krajné čísla sú priemerom najmenšieho počtu dvojíc a stredné zasa tvoria najčastejšie priemery. Teda, ak použijeme 10,11, tak „odpíšeme" dosť veľa iných kombinácií dvojíc čísiel. Preto sa budeme snažiť použiť čo najviac krajných čísiel – 1,2,19,20 a budeme postupne pokračovať v skúšaní. Skúsime doplniť 4,5 a 16,17. Dostaneme 1,2,4,5,16,17,19,20. Problém je, že už nemôžeme doplniť žiadne ďalšie číslo. Namiesto 4,5 a 16,17 preto skúsime doplniť 5,6 a 15,16 ale ani toto nám nevyšlo. Takto pokračujeme ďalej, až kým nezistíme, že ani takto nenájdeme 9 čísiel. Ale ešte stále nemám všetko stratené. Začať totiž môžeme tak, že nepoužijeme úplne krajné dve a dve čísla, ale napr. 1,2 a 18,20. Postupným skúšaním dopĺňaním ďalších dvojíc nájdeme vyhovujúce riešenie: **1,2,6,7,9,14,15,18,20**.
Ak začneme s 1,3 a 19,20, tak tiež nájdeme riešenie (iné): **1,3,6,7,12,14,15,19,20**.
Bodovanie: Postup – vysvetlenie ako si hľadal – 3 body, výsledok so zdôvodnením 2 body. V prípade chybných výsledkov a úvah som strhával 0,2-3 body podľa závažnosti chyby.

PIKOMAT ,22. ročník **šk. rok 2004/2005**

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast organizátorov seminára

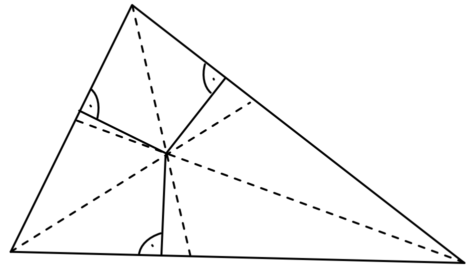
Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Kreslo *opravovala Vlasta Krupla Gubášová*
Najprv si ukážeme, že takmer všetky zo zapisovaných čísel musia byť jednociferné a najviac jedno môže byť dvojciferné. Túto časť riešenia si rozdelíme na dva kroky.
Žiadne zo zapisovaných čísel nesmie mať viac ako dve cifry, lebo ak by niektoré zo zapísaných čísel malo tri cifry, potom súčet zapisovaných čísel (tento súčet označuje počet cifier vo všetkých zapísaných číslach zväčšený o 10 (čo je počet čísel, ktoré sú súčasťou zadania)) by musel byť aspoň 100. To ale nemôže byť.
Najviac jedno môže byť dvojciferné. Keby boli dve čísla dvojciferné, tak by sme museli mať aspoň 10+10+8 čísel, no my ich máme zapisaných len 10 pôvodných + 8 jednociferných a + 2.2 dvojciferné. To je ale len 22. Ak by dvojciferných čísel bolo ešte viac, tak to nepôjde tiež. Lebo všeobecne musí platiť, že 20+d >= 10-d+d.10, kde d označuje počet dvojciferných zapísaných čísel.
Teraz ukážeme že existuje jediné riešenie pre prípad, že jedno zo zapísaných čísel je dvojciferné. Tento prípad je totiž výrazne jednoduchší ako prípad, že všetky zapísané čísla sú jednociferné. Vieme že súčet zapísaných čísel v prípade jedného dvojciferného čísla je 21 a že každé zo zapísaných čísel je aspoň 1. Ak by teda dvojciferné číslo bolo zapísané pri počte cifier 2,3,4, ...,9 potom by to znamenalo, že aspoň 9 (10 je najmenšie dvojciferné číslo a 1 zápis cifry je už v zadaní) zo zapísaných čísel má hodnotu aspoň 2. Súčet týchto čísel by teda bol aspoň 18 a keď k nim pripočítame už spomenuté dvojciferné číslo, potom by celkový súčet bol aspoň 28 – teda viac ako 21. Výsledkom je, že dvojciferné číslo môže byť len u cifry 0 alebo cifry 1. Pre 0 však ľahko ukážeme, že pri jedinom dvojcifernom čísle sa v celej vete môže nachádzať najviac 2-krát - teda nie aspoň 10-krát. Tak sme sa dostali k počtu cifier 1 ako k jedinému dvojcifernému kandidátovi. Pretože všetkých zapísaných čísel je len 10 a z toho len jedno je dvojciferné získavame jasnú odpoveď na možné počty cifry 1 v celej vete – 10 alebo 11 (13 a viac nevyhovuje pretože toľko výskytov vôbec nie je k dispozícii a 12 nevyhovuje, pretože u cifry 2 by nemohlo byť zapísané číslo 1 (druhý výskyt je práve v 12-ke) a teda by sme nedokázali napočítať aspoň 12 jednotiek v celej vete. Podobná argumentácia funguje aj pri zapísanom počte 10 jednotiek. Tým sme našli nasledujúce riešenie (**1x0, 11x1, 2x2, 1x3, 1x4, 1x5, 1x6, 1x7, 1x8, 1x9**).
Ostáva situácia, kedy všetky zapísané čísla sú jednociferné. Súčet zapísaných čísel v prípade jednociferných čísel je 20, každé zo zapísaných čísel je aspoň 1 a číslica (cifra) 0 sa nachádza v celej vete práve raz (v jednociferných číslach sa nemá kde inde vyskytnúť)
Súčet čísel zapísaných pri čísliciach (cifrách) 4,5,6,7,8,9 je 7. Predpokladajme teda, že nie je 7, potom je buď 6 (všetky zapísané čísla sú aspoň 1!) alebo aspoň 8. Ak by bol len 6, potom by počet jednotiek bol aspoň 8 (1 zo zadania, 1x0 a 6 zapísaných pri čísliciach 4 až 9) a teda buď pri číslici 8 alebo pri číslici 9 by musela byť zapísaná aspoň 2 (jedna zapísaná pri jednotke a jedna z pôvodného zadania) – súčet 6 teda nepripadá do úvahy. Nech je teda súčet aspoň 8. Potom by medzi všetkými zapísanými číslami boli aspoň dve, ktoré majú hodnotu aspoň 4 . Keďže pri 0 je zapísaná 1, neostáva nič iné, než aby aspoň pri jednej z číslic 2,3, ...,9 bolo zapísané číslo s hodnotou aspoň 4. Takže teraz sčítajme šesť zapísaných čísel, ktorých hodnotu sme predbežne určili na aspoň 2x4 + 4x2 = 16. Takže aby sme mali celkový súčet 20, musia byť ostatné štyri zapísané čísla rovné 1 (nemôžu byť menšie). Máme tak dôležitý medzivýsledok – ak by súčet čísel zapísaných pri čísliciach 4,5,6, ...,9 bol aspoň 8 potom jediná povolená možnosť je zapísať 3x4,1x5,1x6,1x7,1x8,1x9 – inak by vyššie spomínaný súčet bo aspoň 4 + 5 + 4x2 = 17 a nedokázali by sme zabezpečiť celkový súčet 20.

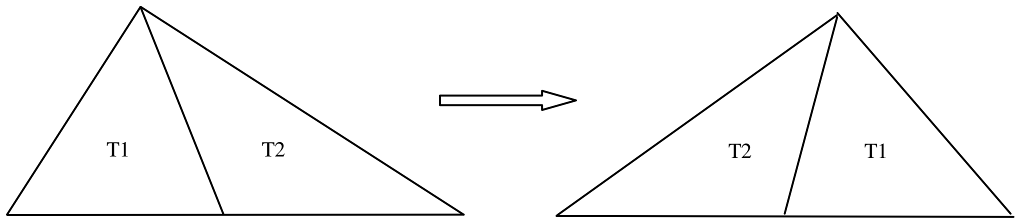
V tomto prípade však opäť máme spor – zo zápisu 1x5,1x6,1x7,1x8,1x9 totiž jasne vyplýva, že pri číslici 1 musí byť zapísané číslo aspoň 5 a teda zápis 1x5,1x6,1x7,1x8,1x9 nemôže viesť k správnemu riešeniu. Teraz už sme si istí, že ak má úloha jednociferné riešenie, potom súčet čísel zapísaných pri čísliciach (cifrách) 4,5,6,7,8,9 je rovný 7.
Teda u piatich z číslic 4,5,6,7,8,9 je zapísaná jednotka. Spolu s jednotkou zapísanou u číslice 0 a spolu s jednotkou zo zadania vyplýva, že celkový počet jednotiek je aspoň 7. u jednej z číslic 7,8,9 musí byť zapísané číslo 2. Z toho u číslice 2 musí byť zapísané číslo 3 (pretože 2 nestačí !!!) a z toho u číslice 3 musí byť zapísané 2. Teraz už len stačí spočítať koľko jednotiek ostalo zapísaných – vyjde nám číslo 7 a teda aj jediné riešenie pre prípad jednociferných zapísaných čísel –
(1x0, 7x1, 3x2, 2x3, 1x4, 1x5, 1x6, 2x7, 1x8, 1x9)
Bodovanie: 4,5 boda za jedno riešenie neúplným náznakom dôkazu, 4 body za jedno riešenie s neúplným postupom, 3,5 boda obe riešenia s postupom, ktorý však nebol systematický, 3 body za jedno riešenie s postupom, ktorý však nebol systematický, 2 body za jedno riešenie s náznakom nejakého postupu (prípadne 2,5 boda ak sú uvedené obe riešenia), 1 bod len za odpoveď s jedným riešením (prípadne 1,5 boda ak sú uvedené obe riešenia).

Príklad S2*:* Pokazené hodinky *opravoval Peter Mitec Miťko*
Keďže učeň hodiny prezrel a vymenil iba ručičky, chyba súvisela iba s nimi. Čo sa teda mohlo prihodiť? V skutočnosti sa učeň pomýlil a dal hodinovú (malú) ručičku na osku minútovej a opačne. Potom sa hodinová ručička správala vlastne ako minútová a minútová ako hodinová. Ďalej bolo potrebné zistiť, kedy prichádzal učeň skontrolovať hodiny. O prvej návšteve vieme, že bolo niečo po ôsmej. Keďže sa ručičky správali opačne, veľká – minútová prešla za 2 hodiny úsek 60° (od dvanástky po dvojku) a malá ručička (hodinová) si spravila 2-krát 360°. Lenže v takomto prípade by bol rozdiel evidentný, veď na učňových hodinkách bola veľká ručička na dvanástke a na hradných zase na dvojke (s minútovou hradnou a hodinovou učňovou ručičkou je to obdobné – jedna je na šestke a druhá na osmičke). Preto minútová ručička musela spraviť ešte aspoň 10 minút. Lenže aj hodinová ručička (na hradných je to veľká) sa hýbe a to 12-krát pomalšie ako minútová. Čiže za 10 minút prešla 50 sekúnd. Rozdiel je teda skoro minúta (5°). Za 11 minút by prešla hodinová 55 sekúnd a to je už veľmi blízko (0,5°). Vieme to však vypočítať ešte presnejšie. Ak prejde minútová ručička za 60 minút 360°, tak potom prejde za 1 minútu 6°. Hodinová prejde za hodinu úsek medzi dvoma číslami – jednu dvanástinu z 360°, a to je 30°. Čiže za 1 minútu prejde 0,5°. Zoberme si napríklad ručičky pri dvojke: na to, aby to vyzeralo, že na hradných hodinách je správny čas, museli byť hodinová hradná (veľká) a učňová minútová (tiež veľká) na rovnakom mieste. (Rovnaké to pravda musí byť aj pre zvyšné dve ručičky. To je však docielené tým, že aj z tejto dvojice ručičiek je jedna minútová a druhá hodinová. Je to vlastne symetrické s tými druhými dvoma ručičkami, a preto mi stačí nájsť stretnutie len jednej z dvojíc.) Čiže si viem spraviť rovnicu: $0{,}5.t + 60° = 6.t$. (60° je náskok hodinovej hradnej.) Po jej vyriešení dostávame presný čas: 10 min, 54 sekúnd a 54,5454... stotín po ôsmej.
Jeho druhý príchod sa uskutočnil niečo po 7-mej ráno. Keďže sú to ručičkové hodiny, tak je jedno, či je večer, alebo ráno, stále je to niečo po 7-mej a preto si uľahčím úlohu a nebudem zbytočne pripočítavať 11 hodín. Zoberiem to tak, ako keby prišiel o niečo viac ako o hodinu po šiestej. Je to vlastne to isté, ako v prípade prvej návštevy, ale teraz bude mať hradná hodinová ručička náskok iba 30°. Presný čas príchodu potom bol: 7 hodín, 5 minút a 27 sekúnd a 27,2727... stotín.
Bodovanie: Za myšlienku, prečo išli hodiny nesprávne bolo od 0 po 1 bod. Za postup ste mohli dostať do 2-och bodov a za každý správny výsledok tiež od 0 až po 1 bod.

Príklad S3: Kabát pána Eduarda *opravovalPeter Drátik Drábik*
Na riešenie tohto príkladu sa dá pozerať z dvoch strán. Máme dieru v tvare rôznostranného trojuholníka a záplatu takého istého tvaru, ktorá do diery pasuje, ibaže je naruby, alebo že máme dieru v tvare rôznostranného trojuholníka a už lícom navrch prevrátenú záplatu, ktorá má tvar zrkadlovo prevrátený oproti trojuholníkovej diere.



V prvom prípade položíme záplatu do diery rubom navrch. Potrebujeme trojuholník prevrátiť naruby a pritom zachovať jeho tvar. Ak je nejaký útvar osovo súmerný, po otočení podľa osi súmernosti naruby si zachová svoj tvar. Musíme teda trojuholník rozdeliť na osovo súmerné útvary. Dobre nám poslúžia osi uhlov. Všetky osi uhlov sa stretajú v jednom bode, ktorý je stredom kružnice vpísanej trojuholníku. Na každú stranu z tohto bodu spravíme kolmicu. Sú to vlastne polomery vpísanej kružnice, takže majú rovnakú dĺžku. Dostali sme tri štvoruholníky, z ktorých každý je osou uhla rozdelený na dva trojuholníky zhodné podľa vety *ssu* (os uhla, polomer, pravý uhol). Keďže os uhla je od oboch ramien rovnako vzdialená, bude v týchto štvoruholníkoch osou súmernosti. Každý z týchto štvoruholníkov na mieste prevrátime podľa osi súmernosti, ich tvar sa nezmení a ocitnú sa lícom navrch. V druhom prípade potrebujeme trojuholník rozstrihať tak, aby sme z častí, ktoré vznikli rozstrihaním bez prevracania poskladali zrkadlový trojuholník. Bolo by dobre, keby sme trojuholník rozstrihali na rovnoramenné trojuholníky, lebo tie majú rovnaký tvar ako ich zrkadlové obrazy. Pravouhlý trojuholník vieme výborne rozložiť na rovnoramenné trojuholníky. Ťažnica na preponu má dĺžku rovnakú ako polovica z prepony. Táto ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva rovnoramenné trojuholníky. Keď tieto dva trojuholníky preusporiadame, dostávame zrkadlovo otočený pravouhlý trojuholník, pričom sme neprevracali žiadnu jeho časť.



Ale čo keď pôvodná záplata bola v tvare ostrouhlého alebo tupouhlého trojuholníka? No predsa výškou ho rozdelíme na dva pravouhlé a na každý z nich použijeme náš známy postup.
Bodovanie: ak riešenie nefunguje pre tupouhlé trojuholníky 4 body, nepresné riešenie nekonečným rozdeľovaním trojuholníka 3 body, ak riešenie fungujúce len pre pravouhlý trojuholník 2 body.

Príklad S4: Knižničný stôl ... *opravoval OliverOli Porges*
Označme si hrany obdĺžnikovej tabule a, b.
Máme stôl predelený rovnobežkami na tri časti, ktorých obsah vieme jednoducho zapísať. Dva pravouhlé trojuholníky s obsahom 2.((a.b/2)/2), po úprave a.b/2.
Obsah celej tabule = a.b; Stredná časť je kosodĺžnik a jeho obsah môžeme vyjadriť ako (b/2+b/2).a/2, po úprave a.b/2. => obsah jedného trojuholníka je zhodný s druhým a je rovný ¼ celého obsahu. Takisto súčet obsahov trojuholníkov je rovný obsahu kosodĺžnika. Tento kosodĺžnik je rozdelený na dva rovnaké celky. Priesečník uhlopriečok
obdĺžnika si označme S. Tento bod leží aj na spojnici stredov strán b, čo sú zároveň aj dva vrcholy kosodĺžnika. Zvyšné dva vrcholy kosodĺžnika sú aj vrcholmi obdĺžnika. Kosodĺžnik je pravideľný útvar a priesečník jeho uhlopriečok je jeho ťažisko. Podľa tohto ťažiska (S) sú naše štvoruholňiký bodovo súmerné.