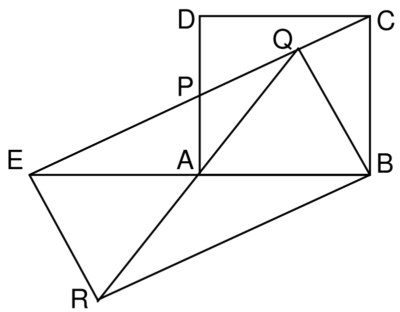
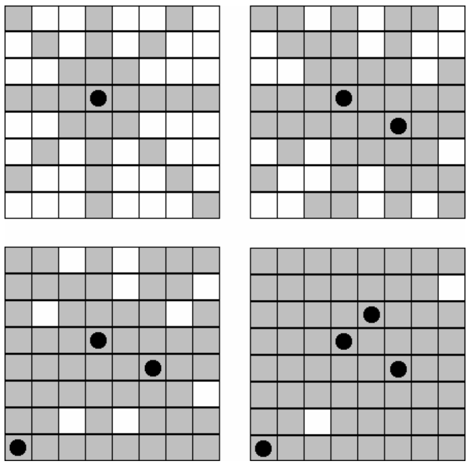
Bodovanie: 0 bodov za „dôkaz“ využívajúci meranie (pravítkom, kružidlom alebo uhlomerom). 0 bodov za dôkaz, ktorý využíva nejaký nedokázaný predpoklad (napr. pretnutie úsečiek v nejakom špeciálnom bode). 0,3 b za uvedenie vzťahov medzi uhlami (napr. PCD, BCQ, QBC, QBA a pod.). 0,5 za nejaký ďalší zmysluplný (k cieľu vedúci) dôkaz (napr. zhodnosť trojuholníkov). 5 b za kompletný dôkaz (nemusel byť vôbec zložitý). Strhával som 0,5 až 2,5b za niektoré nepresnosti alebo nejasnosti.



Príklad S6: Vyslobodenie z jaskyne *opravoval Michal Kesy Kesely*



Označme si postupne stĺpce A-H a riadky 1-8 (ako v šachu). Postupujme pri ukladaní sošiek tak, že si vždy spočítame, koľko ešte neohrozených políčok by soška ohrozovala, keby stála na nejakom konkrétnom mieste (inými slovami, zistíme to pre všetky políčka). Potom sošku položíme na miesto, z ktorého ohrozuje čo najviac políčok. Takže poďme uložiť prvú sošku. Všimnime si, že na obvode šachovnice ohrozuje 22 políčok (políčko na ktorom soška stojí považujeme za ohrozené), kým v stredných štyroch políčkach až 28. Teda položíme sošku na niektoré z týchto stredných políčok, nech to je D4 (prvý obrázok), ostatné sú súmerné. Pre druhú sošku zistíme, že najviac ešte neohrozených políčok ohrozuje, pokiaľ by bola na políčkach B7, C6, D5, E4, E6, F3, F5, F7, G2 alebo G6. Spolu je ich 16. Vyberme si F5 (keby sme ju dali na E6, dostali by sme to isté, len prevrátené). Pre ostatné možnosti si to môžete overiť sami – tie buď k cieľu nevedú alebo na konci dostaneme rovnako veľa ohrozených políčok, ako tu. Pre tretiu sošku teraz dostaneme maximum 11 novoohrozených políčok. A to je práve vtedy, keď stojí na políčku A8. Takže dajme tretiu sošku sem. Štvrtá soška ohrozí najviac nových políčok, keď je na políčku E3, konkrétne 7. Tým máme rozložené 4 sošky a môžeme zrátať, koľko políčok ohrozujú spolu. To je 28 + 16 + 11 + 7 = 62, čo znamená, že neohrozené zostali len 2 políčka, kam sa môžu postaviť Vikiin otec a jeho kolega. Toto riešenie má jednu chybičku. Totižto, ak nájdeme najlepšie postavenie v jednotlivých krokoch, to ešte neznamená, že dostaneme i najlepšie riešenie. Je len vecou náhody, že tu to funguje. Pokiaľ by bolo treba presný dôkaz, príklad by sa stal oveľa ťažším. Preto riešenia tohto typu boli považované za dobré.

Bodovanie: Ak ste našli riešenie s 62 ohrozenými políčkami, máte 5 bodov, za 61 políčok máte body štyri, za 60 tri, za 59 alebo 58 dva, za 57, 56 alebo 55 jeden bod a za menej máte pol bodu...

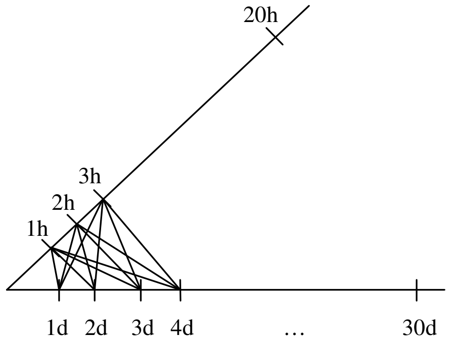
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 7-9

P-MAT n.o. NADÁCIA INGENIUM

organizátor korešpondenčného seminára

podporuje odborný rast organizátorov seminára

Príklad S1: Lacros ala Bijágos *opravoval Peter Miťko Mitec*

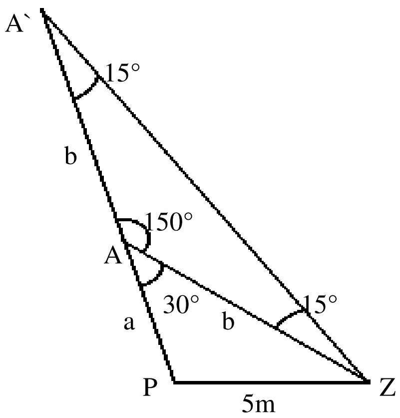


Na dolnom ramene (označím ho D) je 30 dierok a ja ich označím 1d, 2d,3d, ...,30d. Na hornom ramene (H) je 20 dierok a označovať ich budem 1h, 2h, 3h, ..., 20h. Pôjdem po dierkach horného ramena a budem ich spájať so všetkými dierkami na spodnom ramene a budem zisťovať počet križovaní práve dvoch nití! Prečo práve dvoch? Veľká väčšina z vás to predpokladala, ale vôbec to nespomenula. Odpoveď nie je vôbec ťažká, určite na ňu prídete aj sami. Najprv pospájam dierku 1h so všetkými dierkami na ramene D. Natiahnem 30 nití, ale ani jednu živicovú guličku nebudem potrebovať, pretože nite sa nemali s čím preťať. Teraz natiahnem niť z dierky 2h do dierky 1d. Vznikne 29 prekrížení, pretože niť 2h1d sa s niťou 1h1d stretávajú v bode 1d a teda sa určite nebudú križovať. Ďalej natiahnem niť z 2h do 2d a vznikne mi 28 prekrížení, pretože niť 2h2d nebude mať s niťou 1h1d určite nikdy ani jeden bod spoločný, ale má spoločný bod s niťou 1h2d, čiže sa len dotýkajú a nebudú sa teda určite križovať. Pre tretiu niť (2h3d) vznikne analogicky 27 preťatí. Takto to pôjde až po niť 2d30d, ktorá sa nemá s čím preťať. Čiže spolu vzniklo 29+28+27+...+1+0 prekrížení. Mohli ste to spočítať ručne, na kalkulačke alebo... skúste prísť sami na to, ako čo najrýchlejšie sčítať takýto súčet. Súčet čísel 29+28+...+1+0 je 435. Teraz si zoberiem dierku 3h a spojím ju s dierkou 1d. Pretne sa so všetkými niťami, ktoré išli z bodu 1h, pravda okrem 1d1h a taktiež pretne so všetkými niťami z bodu 2h okrem nite 2h1d, lebo majú spoločný bod dotyku. Čiže spolu to je 29+29=2*29. Pre niť 3h2d bude platiť to isté, čo pre predošlú niť, ale nepretne sa s niťami 1h1d, 1h2d, 2h1d, 2h2d. Čiže 28*2. Tretia niť vytvorí 27*2 prekrížení, atď. Dostanem teda : 2*(29+28+...+1+0)=2*435. Nite zo štvrtej dierky mi pretnú nite, ktoré vychádzali z predošlých dierok a teda súčet preťatí bude 3*435. Nakoniec nite z 20-tej dierky pretnú nite z 19 predošlých podľa rovnakých pravidiel. Čiže dostanem znovu súčet čísel od 19 po 1a ak zarátam aj prvú dierku (1h), ktorá nič nepreťala, tak to bude súčet čísel (19+18+...+1+0)*435. Výsledok je teda 190.435=82650. Dievčatá mohli teda nalepiť najviac 82650 živicových guličiek.

Bodovanie: Za správny počet guličiek bolo 0,5b. Za postup som dával od 0,5 do 4,5b.
Ak ste sa vaším postupom nemohli dostať k správnemu riešeniu, tak to bolo za 0,5b. Ak ste urobili v riešení nejaké drobné chyby, tak za to som stŕhal od 0,1 do 0,5 bodu.

Príklad S2: Obradnú konštrukciu *opravoval Matej Benži Bendžala*

Úlohou bolo navrhnúť postup zostrojenia trojuholníka APZ, v ktorom poznáme jednu stranu PZ – 5 m, súčet dĺžok strán PA a AZ – 12 m a uhol PAZ - 30°. Uvažujme bod A` na polpriamke PA`, vzdialený od bodu P 12m – súčet dĺžok strán *a* a *b*. Potom vzdialenosť AA` je rovnaká ako vzdialenosť AZ. Trojuholník AZA` je rovnoramenný, a v takomto trojuholníku sú dva uhly zhodné, vieme ale, že uhol PAZ má 30° potom uhol ZAÁ je 150°. Uhly AA`Z a AZA` majú veľkosť 15°, lebo súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Pri konštrukcii najprv zostrojíme trojuholník PZA`, začneme stranou PA`, ktorej veľkosť je 12m, ďalej poznáme uhol P A`Z a poznáme stranu PZ = 5m, bod Z získame ako priesečník ramena 15° uhla a kružnice s polomerom 5m z bodu P. Ešte ostáva určiť bod A, ktorý leží na úsečke A`P a uhol A`ZA je 15°.



Bodovanie: 5 bodov za správny postup na zostrojenie trojuholníka, alebo aspoň rozbor úlohy, z ktorého vyplýva postup konštrukcie trojuholníka. 0,5 bodu za skúšanie možností ako rozdeliť 12m, ktorého výsledkom bola dĺžka strán 4m a 8m, Body boli strhávané, ak sa v postupe vyskytla chyba alebo bol neúplný. 2 až 3 body boli za približný výpočet dĺžky zvyšných dvoch strán trojuholníka (pomocou rôznych viet platiacich v trojuholníkoch).

Príklad S3: Neobvyklú menovú (re)formu *opravoval Peter Fajler Fillo*

(vzorové riešenie podľa Marty Draveckej)

Takže mám 4 borgy, 20 avekov, 5 jehu. Dokopy mám 29 orechov. Nákupom každého orecha sa mi počet kameňov zníži o jeden (lebo 2 dám a 1 dostanem). Taktiež môžem povedať, že na konci mi ostane aspoň jeden kameň, lebo s jedným kameňom už nemôžem urobiť ďalší nákup. Teda maximálne môžem nakúpiť 29 – 1 = 28 orechov. V tabuľke je znázornený spôsob nakupovania, pri ktorom nakúpime až 28 orechov a zostane jeden kameň.

Popis	Počet Borgov	Počet Avekov	Počet Jehu	Počet orechov takto kúpených	Počet orechov spolu
Stav na začiatku	4	20	5	0	0
po 1. nákupe	9	15	0	5	5
po 2. nákupe	0	6	9	9	14
po 3. nákupe	6	0	3	6	20
po 4. nákupe	3	3	0	3	23
po 5. nákupe	1	1	2	2	25
po 6. nákupe	2	0	1	1	26
po 7. nákupe	1	1	0	1	27
po 8. nákupe	0	0	1	1	28

Po nákupe 28 orechov môže zostať 1 kameň a to 1 jehu. Z pravidla nákupu vyplýva, že kúpou každého jedného orecha sa zmení parita (párnosť, nepárnosť) počtu borgov, avekov aj jehu. To znamená, že na začiatku, bol počet 4b, 20a, 5j. Teda jehu je 5 a to je nepárny počet. Borgov a avekov je párny počet. Takže parita jehu je vždy iná ako parita borgov a avekov. Ak na konci zostal jeden kameň, teda z troch rôznych typov kameňov sú dve nuly a jedna jednotka, tak jednotka môže byť iba počtom jehu, lebo ten má inú paritu ako ostatné kamene. Takže za 4 borgy, 20 avekov, 5 jehu sa dá kúpiť najviac 28 orechov a ak nakúpime 28 orechov, zostane nám jeden jehu.

Bodovanie: Za správnu odpoveď 1b, ak bol správny iba počet kameňov tak 0,5b ak kameň, ktorý zvýši, tak tiež 0,5b. Za vysvetlenie, prečo môže byť počet kameňov najviac 28 a nie 29 bol 1b. Za riešenie (tabuľku nákupu) bol 1b. Ak ste napísali viac tabuliek, tak za každú ďalšiu bolo +0,3b. A za vysvetlenie prečo ostane práve 1 jehu boli 2 body.

Príklad S4: Šamanovu angličtinu *opravovala Majka Hanulová*

Šaman sa k škrtnutej cifre dopracoval počítaním ciferných súčtov čísel. Ak z cifier 1 – 9 zostavíme dve čísla, pri ktorých sčítaní nikdy nemusíme prenášať jednotku do vyšších rádov, bude ciferný súčet výsledku rovnaký ako súčet cifier 0 – 9, teda 45. Ak sa nám stane, že pri sčítavaní prenášame jednotku do vyšších rádov, zmenší sa ciferný súčet výsledku o 9. Najlepšie to vidno na príklade. Ak spočítame čísla 7 a 8, je výsledok 15. To je aj ich ciferný súčet. Do výsledku sa však dostane len cifra 5 a ešte cifra 1, ktorú pripočítame k číslam vo vyššom ráde. Teda namiesto čísla 15 zarátame do ciferného súčtu výsledku 5 + 1, čo je o 9 menej ako 15. Takto to funguje vo všetkých podobných prípadoch. Do ciferného súčtu sa zaráta číslo, o ktoré súčet presahuje 10 a ešte 1, ktorú prenesieme do vyššieho rádu (nikdy neprenesieme viac ako 1, pretože spočítavame len dve cifry). Pri spočítavaní cifier 0 – 9 sa nám môže najviac štyrikrát stať, že prenášame 1 do vyššieho rádu. Preto bude ciferný súčet výsledku 45, 36, 27, 18 alebo 9. Všetky tieto ciferné súčty sú násobky deviatich, takže súčet našich dvoch čísel je deliteľný deviatimi. Keď zo súčtu škrtneme jednu cifru, zmenší sa ciferný súčet o túto cifru. Stačí potom dopočítať, o koľko sa ciferný súčet líši od najbližšieho vyššieho násobku 9. Nefunguje to vždy – ak z výsledku škrtneme 0 alebo 9, v oboch prípadoch dostaneme ciferný súčet deliteľný deviatimi a nevieme sa rozhodnúť, ktorú z týchto cifier sme škrtli (ibaže by bolo súčet 45 alebo 0).

Bodovanie: -1b za nevysvetlenie, prečo sú ciferné súčty násobky 9; -1b za neobjavenie nefungujúcich prípadov; do 3b za riešenia, ktoré fungovali len čiastočne.

Príklad S5: Šamanovo tajomstvo *opravoval Ivan Jarík Kohút*

Označme priesečník polpriamok CP a BA ako E. Bod E bude ležať vo vzdialenosti |PC| od bodu P a |AB| od bodu A, lebo bod P leží v strede strany AD (trojuholníky EAP a CDP sú zhodné podľa vety **usu**). Uhol PQB je podľa zadania pravý, preto trojuholník EQB je pravouhlý. Bod A leží v strede jeho prepony AB, preto platí |EA| = |AQ| = |AB|. Môžeme sa o tom presvedčiť tak, že si trojuholník EQB doplníme na obdĺžnik EQBR (trojuholník ERB je obrazom trojuholníka BQR v stredovej súmernosti podľa bodu A). Teda AQ je polovicou uhlopriečky RQ v obdĺžniku EQBR a keďže uhlopriečky v obdĺžniku majú rovnakú veľkosť, tak |AQ| = |AB|, lebo AB je polovicou uhlopriečky EB v obdĺžniku EQBR.