majetku zostalo 12/13M. Ďalej druhý dedič dostal 2 000 + 1/13 zo zvyšku, čo je 2 000 + 1/13 (12/13M – 2 000). A tieto sumy sa majú rovnať , teda 1 000 + 1/13M = 2 000 + 12/169M – 2 000/13. Upravujeme: 1/13M = 1 000 + 12/169M – 2 000/13 ďalej 13M = 169 000 + 12M – 26 000. Dostali sme M = 143 000. Teda celé dedičstvo je: M + 1000 = 144 000. Prvý (a každý) dedič dostal 1000 + 1/13 M, po vyčíslení 12 000. Odtiaľ už ľahko dostaneme, že Jaternička mal 144 000 / 12 000 = 12 dedičov.
Komentár: Skúška správnosti sa v tomto príklade zišla. Mohli ste si ňou overiť, že každý ozaj dostane rovnakú čiastku.
Bodovanie: Za správne riešenie bolo 1,5 bodu. Zvyšných 3,5 bodu bolo za postup, výpočet a zdôvodnenie správnosti.

Prajeme Ti Veselé Vianoce a veľa zdaru v Novom roku! ☺

Tvoji Opravovatelia

PIKOMAT **,20. ročník** **šk. rok 2002/2003**

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1 *opravoval Martin Malic Handlovič*
Označme si počet darcov ako n. Keby každý poctivo prispel, tak by sme v zbierke mali n(n+1)/2 korún. No mi tam máme iba n+1. Ak niekto zoberie peniaze, tak vlastne je strata zbierky dvojnásobná, lebo neprispel a ešte si toľko zobral. Označme teda všetky straty ako S. Teda máme rovnicu n(n+1) / 2 – 2S = n+1. Upravíme a dostaneme, že S = (n-2) (n+1) / 4. Ale straty sú celé číslo, teda buď n-2 je deliteľné 4, alebo n+1 je deliteľné 4, lebo jedno z týchto čísel je párne a druhé nepárne. Ak je n-2 je deliteľné 4, tak máme čísla 6,10,14,18... (O čísle 2 neuvažujeme, lebo by nemal kto byť chamtivý) Ak je n-1 deliteľné 4, tak máme čísla 3,7,11,15... No teraz si ukážeme, že pre tieto čísla skutočne vieme určiť kto je chamtivec a kto nie a tým ukázať že to sedí. **Pre čísla 6,10,14,18...:** Prvý a posledný zaplatia a zvyšných dáme do štvoríc (2,3,4,5),(6,7,8,9) atď. No a znamienka budú +--+. Teda každá štvorica tvorí nulu a teda to celkovo je prvý+posledný a to je n+1. **Pre čísla 3,7,11,15...:** Necháme posledné tri čísla a zvyšok dáme do štvoríc ako pre chvíľkou. No a to už vieme, že to je nula a posledné tri čísla dostanú znamienka -++ a to bude n+1. Teda darcov môže byť **3, 6 ,7 ,10, 11, 14, 15, 18, 19** atď. HURÁ!!!
Komentár: Niektorí z Vás nepochopili načo je tam sponzor. Je to kvôli tomu, aby aj prvý mal čo ukradnúť. A niektorí zabudli že 2 nie je riešenie. A len pár z Vás ukázalo pre všetky čísla, kto zaplatí a kto je chamtivec.
Bodovanie: Za výsledok bol 1 bod, za postup 1 bod, za zdôvodnenia 1 bod, za vysvetlenie prečo 2 nie je riešenie 0,5 boda, za vysvetlenie prečo aj prvý mohol kradnúť 0,5 boda no a za vysvetlenie znamienok bol posledný 1 bod.

Príklad S2: *opravoval Pavol PC Cvik*
Nech darčeky, ktoré kupoval nejaký muž stáli $10x$ Sk. Potom z nich nakúpil x kusov. Spolu teda zaplatil $10x^2$ Sk. Jeho žena nech kúpila darčeky po $10y$ Sk. Kúpila ich y kusov a spolu za ne zaplatila $10y^2$ Sk. Keďže každý muž zaplatil o 450Sk viacej ako jeho žena, môžeme písať:

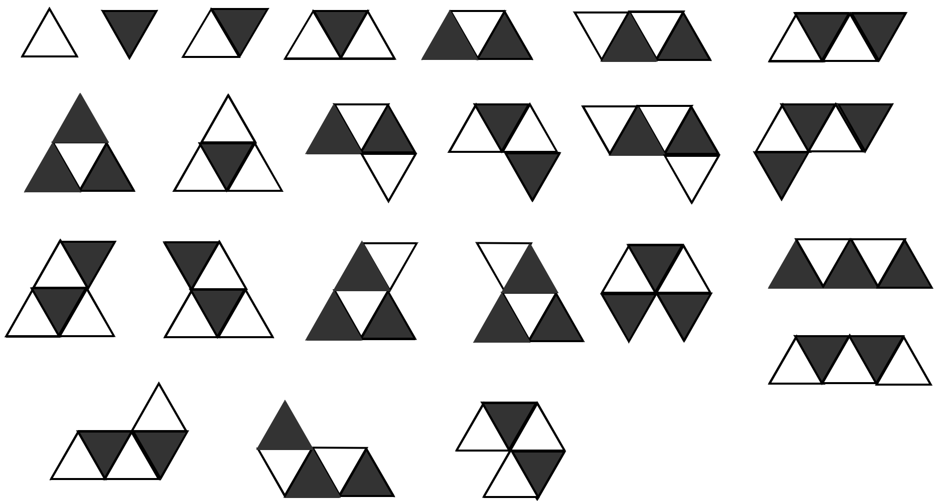
$$10x^2-10y^2=450$$
$$x^2-y^2=45$$
$$(x+y)(x-y)=45$$

Táto rovnica musí platiť pre každý manželský pár. Ľahko nájdeme všetky vyhovujúce rozklady *45* na súčin *2* čísel. (*45.1, 15.3, 9.5*) Tieto dvojice dosadíme do rovníc pre $x+y$ a $x-y$. Prvá sústava vyzerá nasledovne: $x+y=45$ a $x-y=1$. Riešením je $x=23$ a $y=22$. Riešením ďalších dvoch sústav dostaneme ďalšie riešenia: $x=9$, $y=6$ a $x=7$, $y=2$.
Teraz keď už vieme, koľko darčekov nakúpili jednotlivé páry a vieme aj to, že Jano kúpil o *17* darčekov viacej ako Kamila, tak Jano kúpil *23* darčekov a Kamila 6.Keďže Juro kúpil o *7* darčekov viac ako Gabika, tak Juro kúpil *9* a Gabika *2* darčeky. Zvyšné *2* mená už iba doplníme na zvyšné miesta a môžeme povedať, ako vyzerali manželské páry: Jano+Báška, Juro+Kamila a Jožo+Gabika.
Bodovanie: 0..2 body za výsledok, 0..3 body za zdôvodnenie.

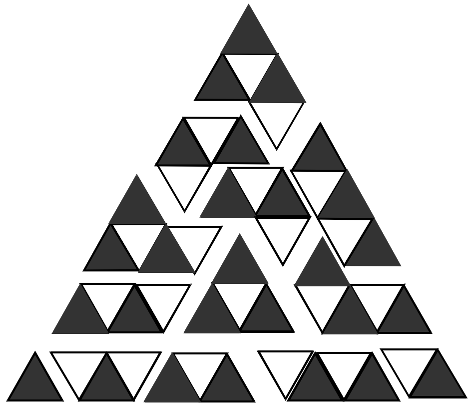
Príklad S3 *opravoval Peter Comp Ambrož*
Úlohou bolo zistiť, či existuje taký rez kockou, ktorý by mal tvar pravidelného 5-uholníka. Odpoveď znie: Nie, neexistuje. Treba si uvedomiť dve veci. Čo je to rez kockou a čo je to pravidelný 5-uholník. Rez kockou je vlastne akási rovina v kocke, ktorá ju rozdeľuje na 2

časti. Keď rozrežeme kocku v polovici, potom rezom je štvorec a delí kocku na 2 kvádre. Rezná úsečka je prienik steny kocky s plochou rezu. Pravidelný päťuholník je rovinný útvar, má všetky strany rovnako dlhé a uhly pri každom vrchole rovnaké, 108° veľké. Žiadne dve strany takéhoto päťuholníka nie sú rovnobežné. Oproti ležiace (a teda rovnobežné) steny kocky majú rezné úsečky tiež rovnobežné. Rez kocky päťuholníkom bude prechádzať piatimi stenami. Takže tu budú 2 dvojice rezných úsečiek, ktoré budú rovnobežné. Ale predsa v pravidelnom päťuholníku nie sú žiadne rovnobežné strany. Záver: Päťuholníkový rez kocky existuje, ale neexistuje taký, ktorý by bol <u>pravidelný</u> 5-uholník. Klára pravdu nemala.
Bodovanie: Všetci, čo prišli k správnemu výsledku týmto alebo iným správnym spôsobom (Napr. cez dĺžky strán, atď...) majú 5 bodov ☺. Išlo hlavne o to, dobre vysvetliť, prečo nie je možné daný rez zostrojiť. Za drobné chybičky 0,5b dolu. Ak ste napísali správny výsledok, plus nejaký náčrt, ale vysvetlenie bolo slabé, prípadne chýbalo, bolo to za 3,5 – 2,5b podľa množstva popisu (2,5b za žiaden popis). Nesprávne postupy boli podľa množstva popisu a chýb hodnotené 1 – 2 bodmi.

Príklad S4 *opravovala Lenka Vojteková*
Ak chceme, aby bola látka rozstrihaná na čo najväčší počet rôznych častí, mali by sme použiť časti skladajúce sa z čo najmenšieho počtu malých trojuholníkov. Na obrázku sú zobrazené časti skladajúce sa z 1, 2, 3, 4 alebo 5 trojuholníčkov. (2 časti z 1 trojuholníčka, 1 časť z 2 trojuholníčkov, 2 časti z 3 trojuholníčkov, 6 častí zo 4 trojuholníčkov a 12 častí z 5 trojuholníčkov) Látka sa skladá zo 49 trojuholníčkov, 21 bielych a 28 čiernych.



Ak by sme použili všetkých 11 častí zložených z 1, 2, 3 alebo 4 trojuholníčkov, použili by sme 34 trojuholníčkov, z toho 17 bielych a 17 čiernych. Teda ešte môžeme použiť 49 – 34 = 15 trojuholníčkov, z toho 21 – 17 = 4 biele a 28 – 17 = 11 čiernych. Keďže sme už minuli všetky časti skladajúce sa z 1, 2, 3 alebo 4 trojuholníčkov, z 15 trojuholníčkov vieme zložiť maximálne 3 časti po 5 trojuholníčkov. Teda zatiaľ to vyzerá tak, že by sme látku mohli rozstrihať maximálne na 14 rôznych častí (3 časti z 5 trojuholníčkov a 11 z častí skladajúcich sa z menej ako 5 trojuholníčkov). Avšak, každá z päťtrojuholníčkových častí sa skladá buď z 3 bielych a 2 čiernych, alebo z 2 bielych a 3 čiernych trojuholníčkov. Teda 3 päťtrojuholníčkové časti sa môžu skladať maximálne z 9 čiernych trojuholníčkov, a my potrebujeme aby obsahovali čiernych trojuholníčkov 11. Teda látka sa nedá rozstrihať na 14 a viac rôznych častí. Pokúsme sa ju zložiť z 13 častí. Zistíme, že existuje niekoľko riešení. Jedno z nich je na obrázku.



Bodovanie: Riešenie s trojuholníkom rozstrihaným na 13 rôznych častí – 3 body. Riešenie s x časťami nezloženými do trojuholníka – 1,5 bodu. Riešenie s trojuholníkom rozstrihaným na x rôznych častí – 0,1 krát x bodov. Riešenie s x časťami nezloženými do trojuholníka – polovičný počet bodov než v predchádzajúcom prípade. (v prípade x ≠13)
Zdôvodnenie – 2 body

Príklad S5 *opravoval Martin MH Hriňák*
Predstavme si nasledujúcu situáciu: máme dvoch kovbojov, ktorí sú veľmi blízko seba, ďaleko od nich je ďalšia dvojica, potom ďaleko od týchto štyroch je ďalšia dvojica, ..., až nakoniec je od 16 kovbojov veľmi ďaleko sedemnásty. Je zrejmé, že sa postrieľajú navzájom v dvojiciach a ten sedemnásty prežije. Teda máme situáciu, keď prežije len jeden. Už len potrebujeme zistiť, či môže nastať situácia, v ktorej neprežije nikto. Ukážeme, že to nemôže nastať dvomi spôsobmi. V prvom predpokladajme, že neprežil nikto. Potom každého zasiahla práve jedna strela. Všimnime si dvojicu kovbojov, ktorá má najmenšiu vzájomnú vzdialenosť. Títo sa musia zastreliť navzájom, lebo sú si najbližšie. Keďže každého zasiahla práve jedna strela, nemôže ich už nič zasiahnuť. Preto tí zvyšní si budú strieľať po sebe. Zase si spomedzi nich zoberieme dvojicu tých, ktorí majú minimálnu vzájomnú vzdialenosť a postup opakujeme. Nakoniec nám ostane jeden kovboj, ktorý má do niekoho streliť, ale už nemá do koho. Dostali sme teda tvrdenie, ktoré protirečí nášmu predpokladu, a teda náš predpoklad nebol správny. Preto musel prežiť aspoň jeden kovboj. V druhom postupe si určíme pre každého kovboja jeho vzdialenosť od toho, do ktorého bude strieľať. Zoberme si toho kovboja, ktorý má túto vzdialenosť maximálnu. Toho nemôže zasiahnuť nikto zo zvyšných 16, lebo majú pri sebe niekoho, kto je k nim bližšie. Preto tento kovboj prežije. Záver: prežije aspoň jeden kovboj.
Bodovanie: Za riešenie, v ktorom ste našli konkrétne rozostavenie 17 kovbojov, z ktorých prežije práve jeden, ste mohli dostať 3 až 4 body – podľa toho, či ste na záver tvrdili, že môže prežiť jedine jeden alebo aspoň jeden. Za odpoveď bez postupu 1 bod, ak bol postup úplne zle, tak aj menej. Mnohí si neuvedomili, že rozobratie niekoľkých prípadov neznamená dôkaz platnosti tvrdenia pre všetky prípady.

Príklad S6: *opravovala Kami Vyslocká*
Po rozdelení dedičstva vysvitlo, že všetci dostali rovnaký diel. Pozrime si dedičstvo prvého a druhého. Prvý dedič dostal 1000 Sk a trinástinu zo zvyšku. Ak si označíme celé dedičstvo M + 1 000, tak to je 1 000 + 1/13 M. Po vysporiadaní s prvým dedičom z