Príklad S6: opravoval Martin MH Hriňák

Označme si naše trojciferné číslo *X*. Potom číslo X s dopísaným doplnkom je rovné $1000X+(999-X)=999\cdot(X+1)$. Označme si ho *Y*. Číslo je deliteľné 72 práve vtedy, keď je deliteľné 8 a 9 súčasne (lebo 8 a 9 sú nesúdeliteľné). To znamená, že číslo *Y* musí byť deliteľné 9 a 8. Deliteľnosť 9 je zrejme splnená vždy. Ostala nám deliteľnosť 8. Keďže 8 a 111 sú nesúdeliteľné čísla, tak musí 8 deliť číslo *X+1*. Z toho máme nutnú a postačujúcu podmienku pre *X*, aby *Y* bolo deliteľné 72: 8 delí číslo *X+1*. Musíme pritom dávať pozor na to, aby číslo *X* nám vyšlo trojciferné. Riešením úlohy sú čísla 103, 111, 119, ..., 991, 999.

Bodovanie a komentár: Vzhľadom na to, že ste v niektorých prípadoch mohli doplnok pochopiť rôzne, napr. či doplnok čísla 900 je 99 alebo 099, tak sa vyskytli riešenia, ktoré to riešili tak aj tak. Za obe (ale úplne správne) riešenia ste mohli získať 4,8 – 5b – podľa toho, či ste to zdôvodnili. Ak vám chýbal postup, mohli ste získať maximálne 3b. Za nedokázanie toho, že 9 delí *Y*, ste mohli stratiť 0,5b. To platí aj pre konštatovanie, že to platí z niekoľkých príkladov. Ak ste našli všeobecný tvar riešení a neuviedli ste aspoň prvé a posledné, mohli ste stratiť 0,2b. Ak ste skonštatovali, že sú to čísla, ktorých doplnok je deliteľný 8 bez ďalšieho upresnenia, mohli ste stratiť 0,2 – 0,5b. Ak ste vypisovali všetky možnosti, tak za každé nesprávne, ktoré som našiel, som strhával 0,2 bodu. Ďalšou častou chybou bolo to, že ste skonštatovali, že z toho, že súčet *X* a jeho doplnku je 999, vyplýva, že *Y* má ciferný súčet 27 (niektorí dokonca 999). Toto neplatí vo všeobecnosti, napríklad 999+1=1000, ale jednotlivé ciferné súčty sú 27, 1 a 1 a 28 ≠ 1. Za takúto chybu ste mohli stratiť 0,5b.

Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: opravovala Dáša Horáková

Pre niektorých z vás bolo možno najväčším problémom zistiť ako vyzerá dominová sada. Keďže sa vám ich podarilo nájsť niekoľko, brala som ich do úvahy. Vzorové riešenie však urobím pre tú najtypickejšiu dominovú sadu: dominové kocky majú na sebe čísla (bodky) od 0 po 6 a každá kocka sa v sade nachádza len raz. Teda v sade bude 28 kociek: 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66. V zadaní je niekoľko dôležitých informácií: 1. súčet dvojciferných čísel, ktoré tvoria bodky na kockách – teda kocky s 0 môžeme použiť len tak, aby sme dostali dvojciferné čísla (10, 20, ...)

2. každú kocku môže použiť len v jednom stĺpci

3. v stĺpci môže byť ľubovolné množstvo kociek teda aj jedna

Najväčší počet stĺpcov dostaneme, keď budú mať čo najmenší počet kociek. Skúsme tvoriť jednokockové stĺpce: 11, 13 (alebo 31 keby sme ju otočili opačne), 23, 41, 43, 53, 61 (samotné kocky musia tvoriť prvočísla) – je ich 7 a ostalo nám ešte 21 kociek. Skúsme z nich vytvoriť čo najviac dvojkockových stĺpcov: keďže prvočísla okrem 2 sú nepárne, na to, aby bol súčet nepárny, potrebujeme jedno párne a jedno nepárne číslo. Avšak kociek, z ktorých môžeme vytvoriť nepárne čísla, je len osem (21, 15 - 51, 25, 33, 63, 45, 55, 65) – teda sa nám určite nepodarí vytvoriť viac ako osem prvočíselných stĺpikov. Ide už len o to, či tých osem dvojkockových stĺpikov z týchto kociek dokážeme vytvoriť. Tu je jedna možnosť: 20+21, 22+25, 33+40, 44+45, 51+62, 46+55, 50+63, 65+66. Nepoužité ostanú kocky 00, 10, 30, 60, 24.

Bodovanie: kto pozabudol na to, že to majú byť dvojciferné čísla – 0,5b; ak ste nenašli najväčší možný počet, tak sa vám za každý nenájdený stĺpik strhlo 0,3 bodu. Trošku sa to potom líšilo pri rôznych sadách v závislosti od maximálneho možného počtu stĺpikov.

Príklad S2: opravoval Michal Priky Prikler

Označme si chlapcov podľa začiatočného písmena ich mena. Takže z podmienok pre 1. zoradenie (t.j. 1.) susedia T sú M a K ; 2.) M je pred D ; 3.) medzi K a D sú najviac 2 ľudia) vyplýva 5 rôznych možností. Potom z podmienok pre 2. zoradenie (4.) T, K, D, P majú pred sebou tých a len tých, kt. boli v 1. zoradení za nimi ⇒ F musí byť na konci ; 5.) medzi T a P je rovnaký počet ľudí ako medzi F a D) už vieme určiť správne poradie.

pre 1. zoradenie :	potom pre 2 zoradenie :
M T K P D	D P K T F – neplatí podmienka 5.)
M T K D P	**P D K T F – vyhovuje všetkým našim podmienkam**
P M T K D	D K T P F - neplatí podmienka 5.)
K T M D P	P D T K F - neplatí podmienka 5.)
P K T M D	D T K P F - neplatí podmienka 5.)

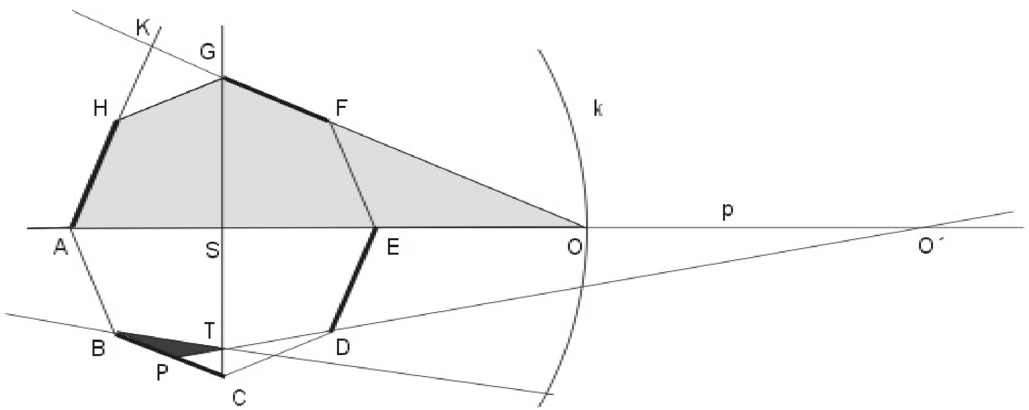
Tak to je asi všetko k našej záhade. **A bodoval** som nasledovne : za správny spôsob riešenia 2b, za oba správne výsledky 2b, a za splnenie a nevynechanie žiadnej podmienky 1b. A samozrejme ± 1b za dajaké nezrozumiteľnosti. Majte sa krásne!

Príklad S3: opravoval Ivan Masaryk

Úlohou bolo zistiť najväčší polomer komína a narysovať obrázok.

Lampy budeme uvažovať iba ako body. Kreslením obrázkov sme zistili, že ak je 1 lampa v klietke a sčasti aj v jej okolí, dokáže sama osvetliť celú klietku. Najvzdialenejší takýto bod je napr. bod K. Kúsok ďalej existuje oblasť v ktorej osvetľuje 1 lampa aspoň polovicu klietky. Najvzdialenejším takýmto bodom je O. Ak posúvame lampu ešte ďalej po priamke p, zmenšuje sa osvetlené miesto cez jednu stenu EF, ale zväčšuje sa osvetlená oblasť cez stenu CD. Musíme preto uvažovať ďalej. Vidíme, že ak sa posúvame s lampami ešte ďalej neosvetlená časť, teraz Δ BPT by sa zmenšoval. Klietka má veľkosť 60 cm a ak má netopier napríklad 6 cm (to je jedna desatina), pri posúvaní lámp

nastane situácia, keď sa už netopier nebude môcť schovať. Od tejto vzdialenosti posúvajúc lampu stále po priamke p sa už netopier nebude mať kde schovať. Ak však zanedbáme veľkosť netopiera, potom je správne umiestniť 1 lampu do bodu O a 2. lampu do symetrického bodu(podľa S).
Iný postup: Na zdaní je pohľad z boku z veľkej diaľky a po malom otočení klietky by osvetľoval práve polovicu klietky. Výpočet: pomocou pytagorovej vety a podobných Δ sa dalo dopracovať k riešeniu, každý k tomu svojmu. Výpočet som nevyžadoval. Niektorí ste použili goniometrické funkcie sínus, kosínus alebo tangens. Prosím vás používajte ich iba vtedy, ak im rozumiete.
Popis konštrukcie(konštrukcia vo vzorovom riešení chýba, obrázok dole je len pomocný)
Pomer 1: 10
1. Narysoval som osemuholník ABCDEFGH so stredom S - klietka
2. priamka p; A patrí p a E patrí p
3. bod O; O je prienik p a polpriamky GF - lampa, ak zanedbávam rozmery netopiera
4. kružnica k; k (S,r= | SO |) - komín
5. O´;|O´S| > |OS| -lampa, ktorá ja ďalej
6. ΔPTB; P je prienik polpriamky O´D a úsečky BC, T je prienik polpriamky O´D a úsečky SC - neosvetlená oblasť
Bodovanie: 2,5 b myšlienkový postup, (z toho 1b obrázok, skúšanie viacerých možností, 1b myšlienkové úvahy o polohách lampy a tieňoch v klietke, 0.5 b ak ste uvažovali, že svetlo môže vnikať z jednej lampy aj dvoma stenami, alebo ste uvažovali, že netopier je iba bod = dodatočný predpoklad), 2,5 b za riešenie (1b riešenie - čím väčší komín ste našli , tým viac bodov, výpočet - nevyžadoval som ho, ale ak bol, mohol pomôcť, 1b popis konštrukcie a označenie, 0,5 b odpoveď na základe obrázka a teórie, ak bola)



Odpoveď1 : Treba postaviť čo najväčší komín a lampy treba umiestniť na priamku p.
Odpoveď2 : Ak zanedbáme veľkosť netopiera, treba postaviť komín s polomerom 72 cm (podľa narysovaného obrázku) resp. 30 . (1+√2) podľa výpočtu

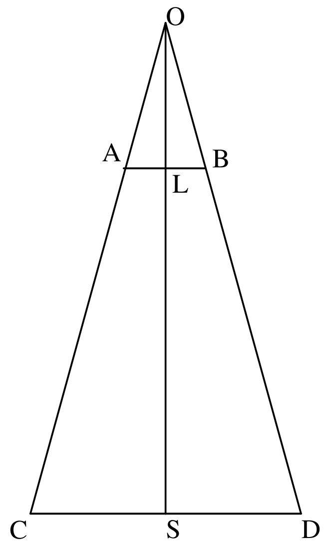
Príklad S4: opravovala Táňa Viszusová
V oboch prípadoch si treba uvedomiť, že ak máme tri skupinky miest ktoré nie sú vzájomne poprepájané (tie skupinky), ale mestá v rámci skupiniek sú spojené všetkými možnými cestami, ten kto je na ťahu prehráva (musí spojiť dve skupinky do jednej a teda jeho protihráč spojí ostávajúce dve skupinky). Hľadáme teda pre niektorého hráča výhodnú trojicu skupiniek, teda takú, že sa do nej vie vždy dostať a vždy z nej vie vyhrať (bez ohľadu na snaženie sa súpera). Takže si zober ceruzku, nakresli osem miest (A až H) a začíname.

8 miest: Pre prvého hráča sa ukazuje byť výhodná trojica 6-1-1 (počty miest v spomínaných troch skupinkách). Pozrime sa na hru. 1. hráč(X) spojí ľubovoľné dve mestá (A,B). Druhý (Z) môže spojiť dve ešte nepripojené mestá (C,D) alebo môže napojiť ďalšie mesto (C). Prvý urobí z týchto štyroch miest jednu reťaz (A,B,C,D) a druhý má teraz tri možnosti:

– pripojí nové mesto (E), X teda pripojí ešte ďalšie mesto (F) a máme situáciu 6-1-1
– spojí dve nepripojené mestá, X ich teda musí pripojiť a opäť máme 6-1-1
– spojí dve už napojené mestá (C,B), vtedy musí X pripojiť jedno z nenapojených miest (E) a Z má zasa dve možnosti; pripojiť jedno z F,G,H a urobiť 6-1-1, alebo spojiť dve nezávislé mestá, máme 5-2-1, alebo urobiť spojnicu medzi mestami v reťazi (B,D) a vtedy X pripojí ešte jedno mesto a je tu opäť 6-1-1

Nikto nechce urobiť ťah ktorým by spojil dve skupiny miest do jednej, ťahov v 6-1-1 je ale len 5+4+3+2+1=15, čiže na 16. ťah najneskôr sa musia spojiť dve skupiny a najneskôr 17. ťah je vyhrávajúci, no a keďže ten urobí prvý hráč, automaticky aj vyhráva a keďže celú hru ako sme ju tu popísali, ovplyvňuje X, tak existuje aj vyhrávajúca stratégia pre prvého, len musíme ešte overiť ako je na tom situácia 5-2-1. Maximálny počet ťahov pred spojením je 10+1=11, teda aj tu vyhrá prvý hráč. Teda Mišo by mal ísť prvý.
9 miest: Obdobným postupom ako pre 8 miest by sme zistili, že optimálna situácia do ktorej vie vždy Z dostať X z ktorej aj vyhrá je 1-2-6, víťazný ťah je najneskôr 18-ty. Teda existuje víťazná stratégia pre druhého hráča. Tu by som ešte chcela ukázať jednu často používanú stratégiu. Označ si v hlave jedno mesto ako 0, dve ako 1a,1b, iné dve ako 2a,2b, potom 3a,3b a na koniec 4a,4b. Teraz len sleduj aké mestá spája súper a ty spájaj opačné (ak napr. spojí 1a,4b ty spoj 1b,4a, ak spojí 0,3b, ty spoj 0,3a). Čo dosiahneš touto taktikou? A domáca úloha: dá sa ňou vždy vyhrať ?
Komentár a bodovanie: Mnohí ste si tento príklad zjednodušili a povedali ste si, že nebudú stavať zbytočné cesty. Oceňujem vynaliezavosť, ale veľa bodov za to nebolo (max.1b). Ak ste si mysleli že treba zrátať všetky cesty a vyhrá ten, kto urobí poslednú a aj ste ich správne zrátali, máte 1,5 až 2 body (kto ich zrátal zle mal do 0,5). 3,5-4 body mali tí, ktorí pre 9 miest za víťaznú považovali trojicu 1-1-7 no a –0,5b bolo za drobné nepresnosti vo vysvetľovaní.
Ospravedlnenie: Ešte sa ospravedlňujem všetkým, ktorý majú riešenia poškrtané modrou fixkou. V týchto riešeniach bola chyba nájdená dodatočne.

Príklad S5: opravoval Martin Malic Handlovič
Príklad hravo vyriešime, ak použijeme podobnosť trojuholníkov. Pre tých, čo tento poznatok nevedia, môžeme použiť vedomosť v tvare: „Koľkokrát sa zväčší palec, toľko krát sa zväčší aj veľkosť oko-ruka“. Je to ľudsky povedaná podobnosť trojuholníkov. Takže riešenie je: Označme AB veľkosť palca a CD veľkosť, ktorú zatieňuje v studni. Trojuholník OLA je podobný s trojuholníkom OSC, lebo majú rovnaký uhol pri bode A, rovnaký je aj pravý uhol a potom je rovnaký aj tretí uhol. Následne musí platiť pomer: OL : LA = OS : SC. A už si len dosadíme správne hodnoty za OL, LA a SC a dostaneme, že OS je približne 740 cm. Ale studňa sa ráta od okraja, teda hĺbka studne je 740 – 47 cm = 693cm.



Bodovanie: Mnohí z Vás majú 5 bodov, alebo 2,5 bodu. 2,5 bodu bolo za riešenie, bez dokázania, že tie dva trojuholníky sú skutočne podobné (bolo treba napísať, že majú rovnaké uhly). Ďalej mnohí z Vás stratili body, lebo si mysleli, že hĺbka je 740cm. Za podobnosť bolo 2,5 bodu, za odrátanie 47cm bol 1 bod a zvyšok bol za postup a zdôvodnenia.