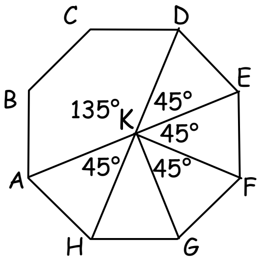
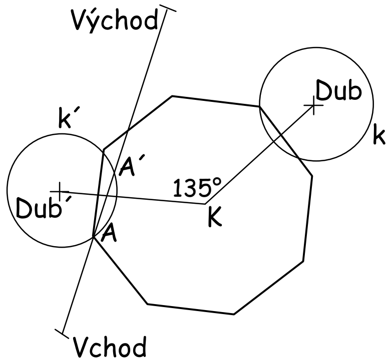
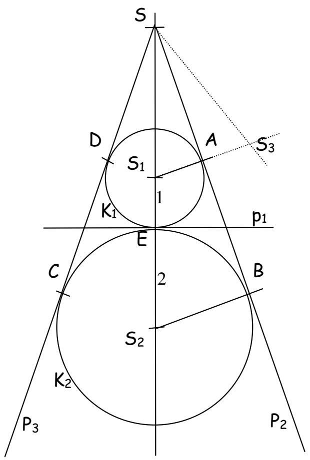
Ak ste riešili jediný prípad s vhodne zvolenými polohami bodov alebo ste polohu Dubu, Kostola a vchodu - východu dourčovali postupne, aby vám to vyšlo bolo 0 bodov. No a za čiastočné vyriešenie úlohy od 0,5b po 3b, v prípade chýb v postupe, nejasné alebo nevysvetlené fakty okolo 3b-4b.





Príklad S6: opravovala Kami Vyslocká

Zdôvodnenie: Načrtnime si ako záhrada s plotmi vyzerá (viď obr.). Aby sa priamka dotýkala kružnice len v jednom bode, musí byť kolmá na jej polomer. (Premyslite si to.) Vieme preto načrtnúť, kde sa budú ploty dotýkať záhrad, sú to body: A, B, C, D, E. Ploty, ktoré vyhovujú zadaniu sú: p_1, p_2, p_3. Polohu bodu E už vlastne máme (dotyk kružníc). Môžeme si všimnúť, že $\Delta\ SAS_1$ a $\Delta\ SBS_2$ sú podobné. (Podľa vety (uu): $\angle ASS_1 = \angle BSS_2$ a $\angle SAS_1 = \angle SBS_2 = 90°$.) V podobných trojuholníkoch sa zachováva pomer prislúchajúcich si strán, preto $|AS_1|: |BS_2| = 100 : 200 = |SS_1|: |SS_2|$. Bod S (priesečník p_2, p_3) bude preto ležať vo vzdialenosti 300 od S_1 a kvôli symetrii bude na spojnici S_1S_2. A teraz stačí zistiť vzdialenosť $|SA| = |SD| = |AB| = |DC|$ (využijeme podobnosť trojuholníkov a symetriu) Dĺžka $|SA|$ je vlastne dĺžka strany v pravouhlom trojuholníku SAS_1 s jednou stranou dĺžky 100 (strana AS_1) a s najdlhšou stranou dlhou 300 (strana SS_1). Teda ak zostrojíme rovnoramenný trojuholník SS_1S_3 so stranami dlhými $|SS_1|$, $|SS_1|$, 2x $|S_1A|$ a nájdeme stred strany S_1S_3, tak máme zostrojenú dĺžku SA. Pri konštrukcii využijeme, že $|S_1S_2|= 300$, $|ES_2|= 200$ a $|S_1E|= 100$ a tieto vzdialenosti preto vieme namerať.



Konštrukcia (len pomocou kružidla)

máme dané kružnice k_1, k_2, stredy S_1, S_2 a spojnicu S_1S_2

1. E; $E \in k_1 \cap k_2$
2. S; $S \in$ priamka $S_1S_2 \cap k_3 (S_1; 300)$
3. S_3; $S_3 \in k_4 (S; 300) \cap k_5 (S_1; 200)$
4. A; $A \in k_6 (S_1; 100) \cap k_7 (S_3; 100)$
5. B; $B \in k_8 (A; SA) \cap k_2$

Body C,D zostrojíme obdobne (symetria).

Bodovanie: Vysvetlenie 1,5 b, nájdenie bodov A a D 1,5b, nájdenie bodov B a C 1,5b, za spomenutie vsetkých bodov dotyku 0,5b. Mnohí z Vás v svojom riešení využívali pre nájdenie bodov A a D rysovanie kružnice s polomerom 150. Ak ste nenapísali, ako sa dá len pomocou kružidla a náčrtu v zadaní získať vzdialenosť 150, stratili ste 1,5b.

Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: opravoval Martin MH Hriňák

Potrebujeme získať všetky prirodzené čísla menšie ako 345, ktoré majú 4 rôzne prirodzené delitele. Tieto čísla musia mať tvar $n = p\ .\ q$ alebo $n = p.p.p$, kde p, q sú rôzne prvočísla.

Zdôvodnenie: Zrejme číslo $n = 1$ zadaniu nevyhovuje. Uvažujme ďalej $n > 1$. Potom vieme urobiť jeho prvočíselný rozklad. Ak by sa v jeho rozklade vyskytovali tri rôzne prvočísla p, q, r, potom by n malo aspoň 8 rôznych deliteľov : $1, p, q, r, pq, pr, rq, pqr$, čo nevyhovuje.

Ak sú v rozklade čísla n na prvočíselné činitele práve dve rôzne prvočísla, tak sa tam nachádzajú len raz. Ak by bolo n v tvare $n = p.\ p\ .\ q\ .\ A$, kde p, q sú rôzne prvočísla a A je prirodzené číslo, potom by n malo aspoň 6 rôznych deliteľov $1, p, p.p, q, p.q, p.p.q$, čo nevyhovuje. To znamená, že nám ostal prípad $n = p\ .\ q$, kde p, q sú rôzne prvočísla. Tu vidíme, že n má práve štyri prirodzené delitele: $1, p, q, pq$.

Ak sa v prvočíselnom rozklade čísla n vyskytuje len jedno prvočíslo, tak $n = p.p.p$ (má delitele: $1, p, p.p, p.p.p$)

Keďže vieme, ako budú čísla strán vyzerať, môžeme ich hľadať. Tu nám nepomôže nič iné okrem ich vypisovania. Hľadajme najprv čísla v tvare $n = p.p.\ p$. Tam máme len 4 možnosti : p=2, 3, 5, 7, lebo 11.11.11>344. Teraz hľadajme čísla v tvare $n = p\ .\ q$. Zrejme menšie prvočíslo musí byť menšie ako $\sqrt{344} \approx 18{,}55$, teda menšie ako 19. Zoberieme si najprv $p = 2$. K tomu môžeme pridať $q = 3, 5, \ldots 167$. To je spolu 38 možností. Pre $p = 3$ máme možnosti $q = 5, 7, \ldots.113$ – spolu 28 možností. Pre $p = 5$ máme $q = 7, 11, \ldots.67$ – 16 možností, pre $p = 7$ máme $q = 11, 13, \ldots.47$ – 11 možností, pre $p = 11$ máme $q = 13, 17, \ldots.31$ – 6 možností. Pre $p = 13$ máme $q = 17, 19, 23$ – 3 možnosti a pre $p = 17$ máme už len jedinú možnosť $q = 19$. Spolu je to **107** možností.

Komentár a bodovanie: Úloha bola nepríjemná v tom, že bolo treba vypisovať veľa možností. Niektorí z vás skúšali všetky čísla od 1 po 344. Ak ste sa pri tom pomýlili, mohli ste stratiť 0,5 bodu za každú chybu. Ak ste prišli na to, že $n = p.q$ vyhovuje, tak ste získali 3 body, ak na to, že vyhovuje aj $n = p.p.p$, tak 2 body. Ak ste sa pri vypisovaní čísel pomýlili, tak ste mohli stratiť 0,1 bodu za každú chybu, maximálne však 1 bod v každom prípade. Ďalšou chybou, ktorú ste robili, bolo to, že ste spomínali, že každé prirodzené číslo má aspoň dva delitele. To ale neplatí pre číslo 1.

Príklad S2: opravoval Martin Malic Handlovič

Tak si to pekne začneme riešiť odzadu. Na to ste prišli všetci. Piate najmenšie prvočíslo je 11. Aj to ste mali všetci. Teraz to musíme vynásobiť 8(opak k deleniu). Vyjde nám 88. Aj to máte všetci. Teraz hľadáme druhú mocninu, ktorej keď pripočítame rozdiel najväčšej a najmenšej cifry je to 88. Rozdiel môže byť maximálne 9(9-0) a teda tá mocnina musí byť niekde medzi 79 a 88. A taká je jediná a to 81. Upravujeme ďalej. Dostávame 81.3=243, obrátime a máme 342. Toto sme dostali odpočítaním ciferného súčtu od iného čísla. Zrejme to nebude číslo štvorciferné, lebo najväčší súčet štvorciferného čísla je 36 a určite nedostaneme 342. Musí byť teda trojciferné a to má ciferný súčet max. 27. Odskúšame čísla 342 až 369 a zistíme, že vyhovujú všetky od 350 po 359. Správne sú tie deliteľné 4 a to sú 352 a 356. Z nich dostávame odpočítaním 20 a vynásobením 5 čísla 1660 a 1680. K prvému môžeme pridať cifry 7,8,9 k druhému len 9. To je spolu 20 čísel, ale dve budú viac ako 90000 a teda nie sú kódmi. Spolu je teda **18** kódov.

Bodovanie: Za výsledok bol 1 bod, za správne určenie 81 bol 0,5 bodu, za čísla 352 a 356 bol 1 bod. Za vyhodenie čísel väčších ako 90000 bolo 0,5 bodu a za zdôvodňovania boli spolu 2 body

Príklad S3: opravovala Monika Steinová

Doplnenie tabuľky: Keďže vieme, že A:C=2:1, potom C:A=1:2 a ak B:D=3:1, potom D:B=1:3 Remíza: Za výhru aj prehru dostanú družstvá párny počet bodov (0 alebo 2). Keďže vieme, že bola len jedna remíza, dve družstvá získali po jednom bode za jeden zápas, čiže majú nepárny počet bodov (všetky ostatné majú určite párny počet bodov). Keď sa pozrieme do tabuľky, zistíme, že nepárny počet bodov majú družstvá A a D, čiže jedine oni mohli medzi sebou remízovať. Poradie a priebeh zápasov: Pokiaľ má A 5 bodov, muselo raz remízovať (s D) a dvakrát vyhrať, čiže vyhralo nad B aj C, čiže je určite prvé. Ak má družstvo D 1 bod, muselo raz remízovať (s A) a dvakrát prehrať, čiže prehralo s B aj s C musí byť štvrté. Teraz už len treba rozhodnúť kto vyhral v zápase medzi B a C. V zápasoch sa dokopy rozdelilo 12 bodov (6 zápasov, za každý 2 body). Družstvá A a D si dokopy rozdelili 6, preto medzi družstvá B a C sa tiež muselo rozdeliť 6 bodov. Družstvá B aj C získali 2 body za výhru nad D a 0 bodov za prehru s A, čiže majú zatiaľ narovnako 2 a 2 body a treba rozhodnúť kto vyhral zápas medzi B a C z získal posledné 2 body (remíza už nie je možná). V tabuľke je zapísané, že družstvo B je druhé z čoho vyplýva, že družstvo vyhralo nad C a získalo ďalšie 2 body.

určenie zápasov: Pri riešení si väčšina riešiteľov postupovala nasledovne: Keďže D prehralo s C 1:3 a výsledné skóre má byť 5:10. Vieme, že určite najväčšia remíza mohla byť 4:4. Preto sa budú dosadzovať remízy 0:0; 1:1; 2:2; 3:3 a 4:4. Keď je zadané výsledné skóre a skóre dvoch zápasov, tak si vieme vypočítať výsledky tretieho zápasu. Preto si stačí dosadiť remízu a dopočítať ostatné výsledky. Na záver stačí skontrolovať všetky podmienky či sú splnené. Podmienky boli splnené pri remízach 1:1; 3:3 a 4:4. Pre remízu 0:0 zistíme, že družstvo B dostalo viac gólov ako je výsledné skóre a pri remíze 2:2 sa opakuje výsledok v zápase C:B=1:2. A výsledky sú v tabuľkách:

	A	B	C	D	Skóre	Body	Poradie
A		V:P	2 : 1	R:R	10 : 7	5	1.
B	P :V		V:P	1 : 2	9 : 8	4	2.
C	3 : 1	P :V		V:P	7 : 6	2	3.
D	R:R	1 : 3	P :V		5 : 10	1	4.

	A	B	C	D	Skóre	Body	Poradie
A		4 : 2	2 : 1	4 : 4	10 : 7	5	1.
B	2 : 4		4 : 3	3 : 1	9 : 8	4	2.
C	1 : 2	3 : 4		3 : 0	7 : 6	2	3.
D	4 : 4	1 : 3	0 : 3		5 : 10	1	4.

	A	B	C	D	Skóre	Body	Poradie
A		5 : 3	2 : 1	3 : 3	10 : 7	5	1.
B	3 : 5		3 : 2	3 : 1	9 : 8	4	2.
C	1 : 2	2 : 3		4 : 1	7 : 6	2	3.
D	3 : 3	1 : 3	1 : 4		5 : 10	1	4.

	A	B	C	D	Skóre	Body	Poradie
A		7 : 5	2 : 1	1 : 1	10 : 7	5	1.
B	5 : 7		1 : 0	3 : 1	9 : 8	4	2.
C	1 : 2	0 : 1		6 : 3	7 : 6	2	3.
D	1 : 1	1 : 3	3 : 6		5 : 10	1	4.

bodovanie: za každé riešenie 0,8 – 1 bod, odôvodnenie remízy medzi A a D--1 bod, zváženie všetkých remíz -- 0,5 bodu, overenie podmienok platnosti -- 0,5 bodu

Príklad S4: opravoval Michal Priky Prikler

Zdravím všetkých! Keďže nie všetci by ste vedeli pradedkovi pomôcť, tak tu je návod, ako na to. Treba si hneď na začiatku uvedomiť, že počet predmetov, ktoré chceme ukladať do tvaru štvorca, musí byť druhá mocnina nejakého prirodzeného čísla.

A tak si podľa zadania zostavíme tabuľku a snáď na niečo prídeme :). Ďalej v našej tabuľke pokračovať nemusíme, lebo vidíme jeden dôležitý fakt. Od piateho roku vyššie bude v počte zavarených fliaš v danom roku na mieste jednotiek nula (lebo 1.2.3.4.5 končí na nulu a tak aj jeho násobky budú končiť nulou). Čiže počet pohárov v pivnici bude mať na mieste jednotiek vždy trojku – lebo k násobkom 720 stále pripočítavame prvé 4 roky, t.j. 33. A druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nekončí trojkou (1 . 1 = **1** ; 2 . 2 = **4** ; 3 . 3 = **9** ; 4 . 4 = 1**6** ; 5 . 5 = 2**5** ; 6 . 6 = 3**6** ; 7 . 7 = 4**9** ; 8 . 8 = 6**4** ; 9 . 9 = 8**1** ; 10 . 10 = 10**0**). Takže už vieme isto, že od štvrtého roku vyššie sa to pradedkovi nepodarilo. No treba ešte overiť prvé tri roky. Zisťujeme, že sa to pradedkovi podarilo iba dvakrát = v prvom a treťom roku, čiže také roky sú len dva. V prvom roku vytvoril štvorec z jedného pohára (lebo $1^2 = 1$ a $\sqrt{1} = 1$, teda je to tiež štvorec) a v treťom z deviatich pohárov. A to bola celá záhada :). Majte sa krásne!

Rok	Zavarených v tomto roku	Z minulých rokov	Spolu
1	1 = 1	0	1
2	1.2 = 2	1	3
3	1.2.3 = 6	3	9
4	1.2.3.4 = 24	9	33
5	1.2.3.4.5 = 720	33	153
6	1.2.3.4.5.6 = 5040	153	873

Bodovanie: Za správne výsledky 2 body a za kompletné odôvodnenie, že ďalej už žiadny štvorec nevznikne ten zvyšok:), a ± 0,5 za nepresnosti.

Príklad S5: opravovala Dáša Horáková

Páčil sa mi tvorivý prístup mnohých z vás, najmä to, že vám nestačilo vyriešiť príklad matematicky, ale ste sa s odvahou pustili aj na pomoc archeológom. Keďže všetci kňazi „ležia“ vo vrcholoch pravidelného osemuholníka, ktorého stredom je Kostol, tak musia byť od K všetci rovnako vzdialení. Teda hrob 1. kňaza (A) aj 4. kňaza (D) sa nachádzajú na kružnici so stredom K. Okrem toho vieme, že všetky uhly AKB, BKC, CKD, DKE, EKF, FKG, GKH a HKA sú rovnako veľké, spolu je to 360°, každý z týchto uhlov má teda 45°. Uhol AKD bude 135°. Ak by sme otočili bod D o 135° proti smeru hodinových ručičiek okolo K (kostola), tak otočený bod D´ bude ležať presne v bode A. Hrob 1. kňaza (A) má ležať na spojnici vchod - východ. Hrob 4. kňaza (D) má ležať vo vzdialenosti 200m od dubu, teda na kružnici so stredom v bode Dub a s polomerom 200m (k). Ak by sme otočili celú túto kružnicu o 135° proti smeru hodinových ručičiek (k´), tak v priesečníku tejto otočenej kružnice a spojnice vchod - východ bude ležať 1. kňaz (bod A). (Podobne by sme mohli otočiť aj spojnicu vchod - východ o 135° okolo K, ale v smere hodinových ručičiek a v priesečníku otočenej spojnice a kružnice okolo dubu by ležal 4. kňaz – našli by sme bod D.) Ak takýto priesečník neexistuje, tak sa archeológovia mýlili. Môže nastať aj prípad, že priesečníky budú hneď dva (ako na obrázku body A, A´), vtedy nevieme hneď určiť, v ktorom z nich bude kňaz naozaj pochovaný. V tomto prípade treba prekopať obe tieto miesta a zistiť to. No a potom, keď už objavíme hrob 1. kňaza (príp. 4. kňaza) tak už nie je problém nájsť miesta uloženia zvyšných siedmich kňazov. To už nechávam na vás. Ešte detail, niektorí z vás sa pokúsili vypočítať polomer kružnice, na ktorej hroby ležia na základe informácie, že pohrebisko má asi 1 km^2 . To sa takto nedá, lebo my nevieme, aký tvar má pohrebisko ani to, či kňazi ležia v jeho rohoch.

Bodovanie: Za správne riešenie (teda určenie presných miest) aj so zamyslením sa nad tým, koľko bude mať úloha riešení 5b, za chýbajúce zamyslenie –0,5b,