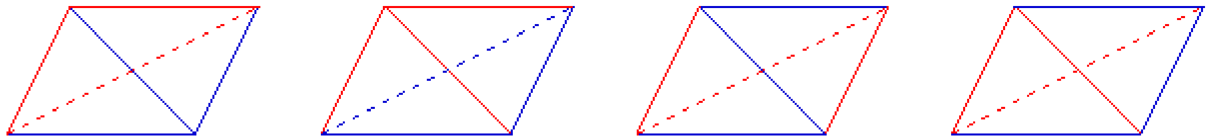
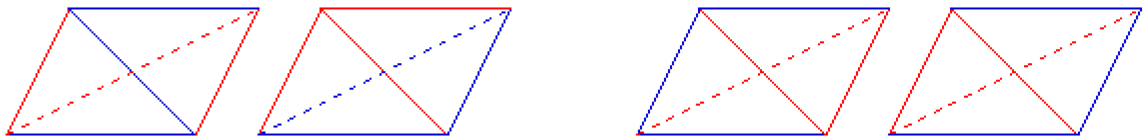
PIKOMAT
Vzorové riešenia 1. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1 (opravoval Ivo Masaryk)

Štvorsteny si môžeme roztriediť podľa počtu modrých resp. červených hrán do siedmich skupín(0-6). Vieme, že dva štvorsteny z rôznych skupín sa nedajú otočiť do rovnakej polohy, lebo majú rôzny počet modrých hrán, a teda stačí skúmať každú skupinu zvlášť. Ďalej môžeme popáriť skupiny, ktoré majú rovnaký počet štvorstenov, teda (0,6 ; 6,0), (1,5 ; 5,1),(2,4 ; 4,2) a (3,3). Konkrétne ich je : 2 . (celý červený + s 1 m. hranou + s 2 m. susednými hranami + s 2 m. protiľahlými hranami) + (3,3). Skupina (3,3) je najzložitejšia a preto je dobré pomôcť si obrázkom.



Je dôležité si uvedomiť, že posledné dva štvorsteny sa nedajú otočiť do takej istej polohy. Otáčaním iba okolo výšky to nejde a nejde to ani otočením okolo hrany(preklopenie na iný bok) a následným otočením okolo výšky. Takýmto točením si vymenia miesto protiľahlé hrany dvoch dvojíc protiľahlých strán. Zistíme však, že štvorsteny tvoria nasledovné dvojice



Rôznych štvorstenov je preto 2×(1 + 1 + 2) + 4 = 12.

Bodovanie podľa počtu štvorstenov, ktoré ste našli: dvanásť 5b; jedenásť 3 až 3,5b; desať 2,5b; deväť 1,5b; šestnásť 2 až 3b; osem alebo sedem 1b; ± postup

Príklad S2 (opravoval Andrej Andyš Šramko)

Tento príklad ste zvládli celkom dobre, takže budem sa snažiť byť stručný. Príklad nám v podstate dával za úlohu, aby sme našli všetky čísla, ktoré sú menšie ako 240 a majú práve štyroch deliteľov. Každé prirodzené číslo má aspoň dvoch deliteľov: jednotku a seba. Takže potrebujeme nájsť ďalšie dva. Existujú dva typy riešení:

1. Každé číslo, ktoré je súčinom dvoch navzájom rôznych prvočísiel má práve štyroch deliteľov. Číslo Z = X×Y, pričom X a Y sú prvočísla má štyroch deliteľov (1, X, Y, Z). Takže sme si vypísali všetky prvočísla menšie ako 120, vynásobili sme ich medzi sebou a všetky čísla menšie ako 240 tvorili časť množiny hľadaných čísiel. Bolo ich 72.
2. (na toto ste mnohí zabúdali) Každé číslo, ktoré je treťou mocninou nejakého prvočísla má práve štyroch deliteľov, napr. 27 = 33. Prvočíselný rozklad tohto čísla je (3×3×3). My z týchto troch trojok chceme vytvoriť dve čísla a to sa dá iba tak, že niektoré dve medzi sebou vynásobíme... A ktorékoľvek dve vynásobíme, dostaneme 9. Takže číslo 27 má deliteľov (1, 3, 9, 27). Takýchto riešení nebolo veľa. Iba tri (8, 27, 125).

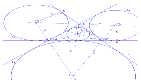
Odpoveď: Radoval som sa 75-krát.

Na záver zoznam všetkých čísel: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 106, 111, 115, 118, 119, 122, 123, 125, 126, 129, 133, 134, 141, 142, 143, 145, 146, 155, 158, 159, 161, 166, 177, 178, 183, 185, 187, 194, 201, 202, 203, 205, 206, 209, 213, 214, 215, 217, 218, 219, 221, 226, 235, 237.

Príklad S3 (opravovala Miša Ačová)

Najprv sa zamyslime nad tým, aký útvar môžu 3 priamky vytvoriť. Keďže sa nepretínajú všetky v 1 bode, znamená to, že každá sa musí preťať s každou (lebo sú rôznobežné) v inom bode a tieto body musia byť tri (ak by boli dve rovnobežné, mohli by byť 2 priesečníky; viac ich byť nemôže). Takže priamky tvoria trojuholník. Prvá kružnica, ktorá bude vyhovovať zadaniu, bude vpísaná kružnica. ďalej máme ešte 6 plôch, ktoré nám ohraničujú priamky. 3 z nich sú však ohraničené iba dvomi z nich, takže tam žiadna hľadaná kružnica nemôže byť. Zostali ešte 3 plochy. Skúsme v nich zostrojiť kružnice. Najprv musíme nájsť stred. Vieme, že kružnica sa má dotýkať všetkých 3 priamok. To znamená, že od všetkých priamok bude stred rovnako vzdialený. Body, ktoré sú rovnako vzdialené od 2 priamok tvoria os uhla, ktorý dané priamky zvierajú (prípadne os pásu, ak sú rovnobežné, ale to nie je náš prípad). Keď máme 3 priamky, stačia nám osi 2 uhlov. Ak máme priamky p, q, r, stred bude rovnako vzdialený od p a q (na osi uhla, ktorý zvierajú p, q), rovnako vzdialený bude od q a r (os uhla, ktorý zvierajú q, r), teda bude rovnako vzdialený od p a r. Vnútri trojuholníka si môžeme vybrať 2 osi uhlov, ktoré zostrojíme. V zvyšných 3 plochách musíme urobiť osi všetkých uhlov, lebo v každej ploche sú len 2. Takže teraz už máme všetky stredy. Vidíme, že sú 4 (v každej ploche 1). Zostáva nám ešte nájsť polomer pre každú kružnicu. Pripomeňme si, že kružnica sa dotýka všetkých 3 priamok. Takže stred je od všetkých 3 priamok rovnako vzdialený. Takže stačí nájsť vzdialenosť stredu od ľubovoľnej priamky. A ako nájdeme vzdialenosť bodu od priamky? Urobíme kolmicu na danú priamku, ktorá prechádza daným bodom. Dĺžka úsečky od daného bodu (stredu) po bod, kde sa kolmica stretne s priamkou, je vzdialenosť bodu od priamky, teda aj polomer hľadanej kružnice. Takže už máme 4 stredy kružníc a 4 polomery, môžeme teda kružnice narysovať.

Obrázok + zápis konštrukcie:



1. $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$
2. $o_1 = \text{os } \alpha, o_2 = \text{os } \beta, o_3 = \text{os } \gamma, o_4 = \text{os } \alpha', o_5 = \text{os } \beta', o_6 = \text{os } \gamma'$
3. $S_1 \in o_1$ Ç $o_2 \cap o_3$
4. $t_1, t_1 \perp r, S_1 \in t_1$
5. $T_1 \in t_1 \cap r$
6. $k_1\ (S_1;|S_1T_1|)$
7. $S_2 \in o_4 \cap o_6$
8. $t_2, t_2 \perp r, S_2 \in t_2$
9. $T_2 \in t_2 \cap r$
10. $k_2\ (S_2;|S_2T_2|)$
11. $S_3 \in o_5 \cap o_6$
12. $t_3, t_3 \perp q, S_3 \in t_3$
13. $T_3 \in t_3 \cap q$
14. $k_3\ (S_3;|S_3T_3|)$
15. $S_4 \in o_4 \cap o_5$
16. $t_4, t_4 \perp q, S_4$ Î t_4
17. $T_4 \in t_4 \cap q$
18. $k_4\ (S_4;|S_4T_4|)$

Bodovanie: za postup konštrukcie ste mohli získať 2 body, za slovný popis (vysvetlenie postupu - prečo ste rysovali práve takto) ďalšie 2 body no a za samotnú konštrukciu 1 bod. Ak ste našli iba 1 kružnicu (vpísanú), mohli ste dostať iba polovicu bodov.

Príklad S4 (opravovala Lenka Gažová)

Najmenší počet otázok, ktoré musíme škriatkovi položiť je jedna. A tá znie napr. "Ktorými cestami by ma mohol poslať na Klamstvo klamár?" Rozoberme všetky prípady:

- Ak by sme stretli škriatka z Pravdy alebo zo Striedavej, odpovedal by nám pravdivo a ukázal by 2cesty: na Striedavú a na Pravdu, na ktoré by nás naozaj poslal klamár.
- Ak by sme stretli škriatka z Klamstva, tak bude klamať, a ukáže nám cestu, ktorou by nás klamár neposlal a teda na jediný kopec a to na Klamstvo.

Z toho vyplýva, že ak stretnem škriatka, ktorý ukáže na dve cesty, tak tretia cesta je správna. Ak stretnem škriatka, ktorý ukáže na jedinú cestu, tak práve tá vedie na klamstvo.

Bodovanie: 5bodov - za 1 otázku aj so zdôvodnením, 4 body - za 2 otázky aj so zdôvodnením, 3 body - za 3 otázky so zdôvodnením, 2 body za 4 a viac otázok so zdôvodnením.

Príklad S5 (opravoval Martin Hriňák)

Veďme bodom D priamku p rovnobežnú s priamkou AC. Nech X je bod na priamke p taký, že veľkosť uhla CDX je 39°. Potom veľkosť uhla XDE je 44°. Podobne veďme bodom E priamku q rovnobežnú s AC, na nej zvolíme bod Y tak, že veľkosť uhla DEY je 44°. Potom veľkosť uhla YEF je 43°. Bodom F veďme priamku r rovnobežnú s AC, na nej zvoľme bod Z tak, aby veľkosť uhla EFZ bola 43°. Potom je veľkosť uhla ZFG rovná 40°. Ale ak by boli priamky AC a

BG rovnobežné, tak by museli byť aj priamky r a BG rovnobežné. Ale ak by boli rovnobežné, tak uhly ZFG a FGB by boli striedavé, teda by sa rovnali. Preto priamky AC a BG nie sú rovnobežné.

Komentár: K najčastejším chybám patrilo to, že ste si vytvorili svoje označenie a nenapísali ste, čo sú jednotlivé body. Za riešenia využívajúce tvrdenie, že súčet uhlov CDE, EFG nie je rovný súčtu uhlov ACD,DEF, FGB, a preto tieto priamky nie sú rovnobežné, bez dôkazu, ste mohli získať maximálne 3,5 bodu (ak ste to dokázali tak samozrejme 5). Ďalej mnohí z vás tam používali rôzne priamky - napr. povedali ste, že priamka DF je kolmá na AC... To ale nemusí vždy platiť. Za takéto chyby ste mohli stratiť 1-2 body. Ak ste mali správny výsledok, mohli ste získať 2 body. A ak ste zabudli na postup, tak ste 1 bod mohli stratiť.

Príklad S6 (opravoval Palo Minárik)

Teoreticky, aby panáčikovia prešli trať za najkratší čas, nemali by nikde strácať čas. Čas strácajú vtedy, ak jeden čaká na druhého. To znamená, že aj do cieľa by mali prísť naraz. Taktiež by mali čo najefektívnejšie využívať bicykel, ktorý je rýchlejší. Najrýchlejšie idú, keď je bicykel stále obsadený. Samozrejme, panáčikovia by sa nemali vracať. Treba zistiť, či sa dá trasa prejsť za týchto podmienok. Možností, ako by trasu mohli prejsť je viac, stačilo napísať jednu. Takže napríklad: obaja vyštartujú (je jedno, či rovnakým, alebo rôznym smerom), jeden peši, druhý na bicykli. Po jednej hodine sa stretnú. Prvý panáčik má prejdenú dráhu 1,5 kola, druhý 0,5 kola. Bicykel si vymenia a pokračujú každý svojim smerom. Do cieľa dorazia súčastne po 2 hodinách a obaja budú mať prejdené dve kolá. (Ak to nie je jasné, skús si to nakresliť!) Toto je jedna možnosť. Správne sú aj iné, ktoré spĺňajú podmienky pre najkratší čas. Teraz, keď vieme, že rýchlejšie to nejde, stačí spočítať, koľko im to trvalo. Najkratší čas sú teda 2 hodiny. Keďže 2 hodiny sú menej ako 2,5 hodiny, panáčikovia to do limitu stihnú.

(Poznámka: Veľakrát ste nejakým spôsobom vypočítali čas 2 hodiny, ale nevysvetlili ste, prečo je najkratší! Tu ste prichádzali o body!)

Bodovanie: dá sa to stihnúť 1b; minimálny čas 2h 1b; ako to urobiť 1b; prečo je to najrýchlejšie 1b; komentáre, vysvetlenia, ako ste riešili 1b; dokopy je to 5b