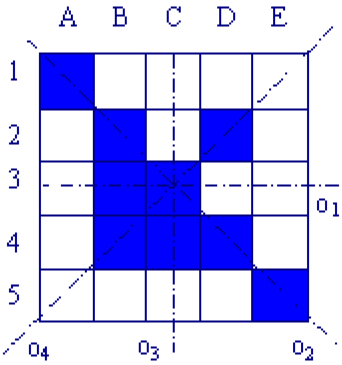
PIKOMAT
Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: opravoval Martin Nevagi Vagaský



Celý obrázok má tvar štvorca, takže môže byť osovo súmerný podľa jednej zo štyroch osí súmernosti štvorca (pozri obrázok). Označme si políčka podobne ako v šachu: riadky číslami 1-5, stĺpce písmenami A-E. Rozoberme jednotlivé prípady osí súmernosti:

o1

na to, aby bol obrázok súmerný podľa osi o1, musíme určite dofarbiť štvorce E1 (kvôli A1), D3 (kvôli B3) a A5 (kvôli B5). Teraz je obrázok osovo súmerný. Dofarbili sme 3 štvorce, takže toto bude aj prvá vyhovujúca možnosť. Zároveň to je asi aj posledná možnosť súmerná podľa osi o1, lebo viac štvorcov (ako 3) už dofarbovať Jožko nechcel..

o2

Na to aby bol obrázok súmerný podľa osi o2, musíme určite zafarbiť políčka C2 (kvôli B3) a D3 (kvôli C4). Teraz je obrázok osovo súmerný, takže máme ďalšiu vyhovujúcu možnosť. Zafarbili sme zatiaľ iba 2 políčka, skúsme sa teda pozrieť, či sa nedá dofarbiť ešte tretie tak, aby bol obrázok súmerný podľa osi o2: Ak by sme zafarbili políčko, ktoré nie je na osi súmernosti, museli by sme zafarbiť aj s ním osovo súmerné políčko, to však už nemôžeme urobiť, lebo by sme zafarbili spolu 4 políčka. takže podľa osi o2máme tiež iba jednu možnosť dofarbenia.

o3

na to, aby bol obrázok súmerný podľa osi o3, musíme určite dofarbiť štvorce C2 (kvôli C4), A5 (kvôli A1) a E1 (kvôli E5). Teraz je obrázok osovo súmerný. Dofarbili sme 3 štvorce, takže toto bude aj prvá vyhovujúca možnosť. Zároveň to je asi aj posledná možnosť súmerná podľa osi o3, lebo viac štvorcov už dofarbovať Jožko nechcel..

o4

To najzaujímavejšie sme si nechali na koniec. Podľa tejto osi je obrázok súmerný už pred dofarbovaním. Pre prehľadnosť rozdelíme tento prípad na tri menšie a síce s dofarbením 1 štvorčeka, 2 štvorčekov a 3 štvorčekov

Jeden štvorček

musí Jožko dofarbiť priamo na osi, ak by totiž dofarbil štvorček, ktorý neleží na osi, pokazil by symetriu a musel by zafarbovať aj s ním súmerný štvorček. Na osi o4 sú 2 nezafarbené štvorčeky, takže Jožko má v tomto prípade 2 možnosti dofarbenia: A5 a E1.

Dva štvorčeky

Ak chce Jožko dofarbiť 2 štvorčeky, môže dofarbiť buď obidva nedofarbené na osi (A5,E1) alebo ľubovoľný iný a s ním aj osovo súmerný štvorček. Okrem A5 a E1 je nezafarbených ešte 7 dvojíc štvorčekov a teda je aj 7 možností dofarbenia: (B1,E4), (C1,E3), (D1, E2), (C2, D3), (A2, D5), (A3, C5) a (A4, B5). Iná možnosť nie je.

Tri štvorčeky

Ak Jožko zafarbí najskôr štvorček na osi, bude obrázok súmerný podľa o4 a zvyšné dva štvorčeky musia byť tiež súmerné podľa o4. Ak zafarbí najskôr štvorček mimo osi, musí zafarbiť aj s ním súmerný štvorček a potom mu ostane dofarbiť iba jeden štvorček a ten musí byť na osi. Takže nech robí, čokoľvek, vždy musí zafarbiť jeden štvorček na osi (A5 alebo E1) - 2 možnosti a jednu dvojicu navzájom súmerných štvorčekov (B1,E4), (C1,E3), (D1, E2), (C2, D3), (A2, D5), (A3, C5) alebo (A4, B5) - 7možností. Možností zafarbenia štvorčekov bude teda 2 . 7 = 14.

Na záver rekapitulácia: o1: 1 možnosť; o2: 1 možnosť; o3: 1 možnosť; o4: 2 + 8 + 14 = 24 možností. Spolu 1 + 1 + 1 +

24 = 27 možností? Nie, jedna z možností je totiž súmerná podľa osi o2aj podľa osi o4máme ju teda započítanú dvakrát. Rôznych možností je preto iba 26.

Bodovanie: ak ste neuvažovali o ostatných osiach -1 b, ak ste nič nezdôvodnili -0,5 b, za každú zlú alebo chýbajúcu možnosť - 0,1 b, a menej bodov za zlé riešenia

Príklad S2: opravovala Irinka Malkin

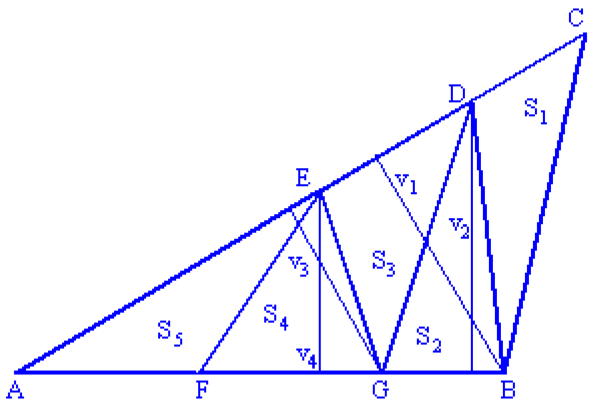
Na začiatok rozoberieme dve možnosti: Paľo nie je zlodej a Paľo je zlodej. Nech Paľo, nie je zlodej. Potom z podmienky, že 4 uviedli jedného páchateľa správne a druhého nesprávne a jeden z nich uviedol oboch nesprávne, vyplýva, že buď dvaja alebo traja z Kuba, Adama a Braňa sú zlodeji. Ak sú všetci traja zlodeji, nevyhovuje to zadaniu.

Ak Braňo nie je zlodejom, musí byť zlodejom Maťo (podľa Jana). Ak Braňo je zlodejom, nie je zlodejom Maťo (znova podľa Jana). To znamená, že potom zlodejom musí byť Jano (podľa Paľa). Každopádne máme troch zlodejov, čo nemôže byť.

Teraz zistíme, čo sa stane, ak Paľo je zlodej. Potom Kubo, Adam a Braňo zlodejmi nie sú. To znamená, že druhým zlodejom môže byť Maťo alebo Jano. Ak je zlodejom Maťo, potom piati uviedli jedného zlodeja dobre, a toto nie je možné. Ak je zlodejom Jano, sú všetky podmienky splnené. Teda úloha má jediné riešenie: Jano a Paľo sú zlodeji.

Bodovanie: Každý dobrý nápad sa uznával. J 4 body sa dávali za správny nápad a správny výsledok a chybičku v úvahe, kvôli ktorej nebolo dokázané, že je riešenie jediné (neuvažovali sa iné možnosti). Ak bolo logických chýb viac, bodov bolo menej (približne o bod menej, za každú chybu).

Príklad S3: opravovala Dáša Horáková



Kúsky torty majú mať rovnaký obsah, teda obsahy $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1/5$ S, S je obsah celej torty. Obsah trojuholníka: S = (z.v)/2, z - základňa, v - výška na základňu. Všimnime si ΔABC (obsah je S) a ΔDBC (obsah je S_1). O nich vieme, že majú spoločnú výšku v_1 a platí $S = 5S_1 \times S = (|AB|.v_1)/2$, $5S_1 = 5(|DB|.v_1)/2$. Z toho dostanem, že |AC| =5 |DC|, teda **|DC| =1/5 |AC|**. Môžeme odkrojiť jeden kúsok torty (s obsahom 1/5 S). Zostal nám ΔADB, ktorý máme rozdeliť už len na štyri časti s rovnakým obsahom. Obsah ΔADB sú 4/5 S, pretože 1/5 S sme už odrezali. ΔGDB má mať obsah 1/5 S. ΔADB a ΔGDB majú spoločnú výšku v_2, ich obsahy sú v pomere 4:1, aj dĺžky ich základní musia byť v tom istom pomere (stačí dosadiť do rovnice $S = 4\ S_2$), teda |GB| = 1/4 |AB|. Môžeme odrezať ďalší kúsok torty. Zostal nám ΔADG, ktorý treba rozdeliť na 3 rovnaké časti, jeho obsah sú 3/5 S. Obsah ΔEDG je 1/5 S. ΔADG a ΔEDG majú spoločnú výšku v_3, ich obsahy sú v pomere 3:1 ($S = S_3$), teda aj ich základne budú v tomto pomere. |ED| = 1/3 |AD|. Nakoniec nám zostal ΔAEG, ktorý máme rozdeliť na dva trojuholníky (ΔAEF a ΔFEG) s rovnakým obsahom ($S_4 = S_5$). Tieto dva Δ majú spoločnú výšku v_4, aby mali rovnaký obsah, musia mať aj rovnaké základne. **|AF| = |FG|**. Takže to zhrňme:

|DC| = 1/5 |AC|, teda |AD| = 4/5 |AC|, |ED| = 1/3 |AD| = 1/3 (4/5 |AC|) = 4/15 |AC|, teda |AE| = 8/15 |AC|. |GB| = 1/4 |AB|, teda |AG| = 3/4 |AB|, |AF| = |FG| = 1/2 |AG| = 1/2 (3/4 |AB|) = 3/8 |AB|.

Pri krájaní môžeme postupovať dvoma spôsobmi: buď budeme tortu krájať tak, ako sme to robili tu alebo si stranu AB rozdelíme na osem rovnakých dielov (GB - dva diely, AF a FG po troch dieloch) a stranu AC rozdelíme na 15 dielov (DC - 3 diely, ED - 4 diely, AE - 8 dielov). Samozrejme, že sa to dalo riešiť aj inak, ale toto bolo najčastejšie a asi aj najjednoduchšie riešenie vzhľadom na to, že krájame tortu.

Bodovanie: za správne riešenie 5 bodov, drobné chyby - 0,2 b, drobné chýbajúce zdôvodnenie - 0,5b, závažnejšie chýbajúce zdôvodnenie - 1,5 b, za riešenie pomocou výpočtu obsahov a merania dĺžok 4b, za delenie na inak vyzerajúce časti od 0,5 po 2,5 b.

Príklad S4: opravoval Peťo Pištík Kolesár

Dve nasledujúce čísla postupnosti sa líšia o dve, ak sú obe nepárne alebo obe párne, a o jedno, ak je jedno párne a druhé nepárne. Takže 2001. člen spočítame ako 2×2001 - (počet zmien z párneho na nepárne alebo naopak pred 2001. číslom). Ak zoskupíme čísla, podľa toho, či sú párne alebo nepárne, dostaneme skupinky, v ktorých sú jedno, dve, tri, štyri, päť,... ,n-1, k čísel, k≤n, lebo na konci nemusí byť celá skupinka. Chceme vedieť, koľko je skupiniek, presne toľko je totiž zmien z párneho na nepárne. Vieme, že 1 + 2 + 3 + ... + n-1 + k = 2001. Ak sa chvíľku zamyslíte, zistíte, že súčet n za sebou idúcich čísel je n (n + 1) / 2, teda 1 + 2 + 3 + ... + n-1 + k = (n - 1) n / 2 + k = 2001.

Vyskúšame pár čísel blízko √2001 a zistíme, že n je 63. 2001. člen postupnosti je teda 2×2001 - 63 = 3939.

Bodovanie: dobrý výsledok, dokázali ste všetko, z čoho ste vychádzali 5 b; dobrý postup, malá chyba vo výsledku (± 2) 4,5 b; nedokázali ste niečo, z čoho ste vychádzali, najčastejšie ste len skonštatovali, že posledný člen n-tej skupiny je n2 4 b; to predtým, len ste niekde urobili chybu 3 - 3,5 b; len naznačený alebo čiastočne chýbajúci postup 2b; dobrý výsledok, k nemu niečo napísané 1 - 1,5 b; za snahu - ak ste napísali 3 strany čísel a máte zlý výsledok 1 b.

Príklad S5: opravovala Soňa Šitzová

Prvočíslo je buď na kartičke A.B alebo na A+B. Keby bolo na A×B, muselo by byť jedno z čísel A alebo B prvočíslo a to druhé číslo 1, lebo inak by A×B nebolo prvočíslo. Nech A=1. Potom A + B + A×B = 1 + B + B = 431, B = 215 a to nie je prvočíslo. Teda prvočíslo musí byť číslo A+B.

Rovnicu A + B + AB = 431 upravíme na (A + 1).(B+1) = 432. A+B je prvočíslo, môže to byť buď 2 alebo je to nepárne prvočíslo. Dva to zjavne nie je. Nepárne číslo dostaneme sčítaním párneho a nepárneho čísla. Keby A bolo párne, A+1 je nepárne a B+1 párne. Spravíme si prvočíselný rozklad čísla 432 a budeme skladať čísla A a B 432 = 2^4 3.

A+1	B+1	A	B	A+B	
1	432	0	431	431	prvočíslo
3	144	2	143	145	
9	48	8	47	55	
27	16	26	15	41	prvočíslo

0 a 431 to nemôžu byť, pretože 0 nie je prirodzené číslo. Jediné riešenie je A = 26, B = 15. Skontrolujme to: 26 + 15 + 340 = 431, 26×15 = 431

Bodovanie: nedokázali ste, že je len jedno riešenie 4,5b; nedokázali ste, prečo musí byť A+B prvočíslo 4b; nie veľmi jasné riešenie, nedokázali ste, že je len jedno riešenie a prečo musí byť A+B prvočíslo okolo 3,5b; riešenie bez komentára 3b

Príklad S6: opravovala Táňa Viszusová

Každé prirodzené číslo sa dá zapísať v jednom z nasledujúcich tvarov: 3n , 3n + 1, 3n + 2.

Teda aj naše hľadané prvočíslo p. Ak **p = 3n** , tak potom p = 3 (lebo 3 je jediné prvočíslo deliteľné troma) a teda p + 2 = 5 a p + 4 = 7.

Ak p = 3n + 1, potom p + 2 = 3n + 1 + 2 = 3n + 3 = 3 (n + 1). A teda p + 2 = 3 (lebo aj p + 2 je prvočíslo). Z toho vyplýva, že p + 4 = 5 a p = 1. To ale nemôže byť, pretože 1 nie je prvočíslo.

Ak p = 3n + 2 , potom p + 2 = 3n + 4 a p + 4 = 3n + 6 = 3 (n + 2). Z toho vyplýva, že p + 3 = 3 (lebo p + 4 je tiež prvočíslo). A teda p + 2 = 1 a p = -1. Avšak ani jedno z nich nie je prvočíslom.

Takže jediným riešením je trojica 3, 5, 7.