

PIKOMAT

Zadania 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Dúfam, že aj vám sa začal školský rok nad vaše očakávania. Už vás neučí tá učiteľka, ktorú ste nemali radi, alebo predmet, ktorý doteraz nemal zmysel, ho už konečne má a nie je taký nudný. Ak je ale všetko pri starom, nezúfajte, ešte stále to je lepšie ako to, čo sa prihodilo mne. Rodičia ma poslali na týždeň na výmenný pobyt do istej nemenovanej krajiny. Samozrejme, že ich jazyk som ovládal len minimálne. Tak si asi viete predstaviť, aké to bolo, keď som tam bol v škole. Vôbec ničomu som nerozumel. No, sem-tam nejaké útržky. Samozrejme najviac som rozumel z matiky. Učili sme sa tretie mocniny. Učiteľka nakreslila takúto tabuľku, v prvom riadku boli čísla 1, 2, 3, 4, ... v druhom ich tretie mocniny 1, 8, 27, 64, ... a v treťom riadku to bolo fakt divné. Ich matikárka si tam písala, čo chcela. Nejaké násobky desiatich. Neskôr som pochopil, že tam vlastne píše buď rozdiel alebo súčet čísel, ktoré sú nad sebou: $1-1=0$, $2+8=10$, $3+27=30$, $64-4=60$, ... No a to bolo naozaj zvláštne, že jej to stále vychádzalo a mala to deliteľné 10. Po zvyšok hodiny som sa snažil nájsť také čísla, pre ktoré to neplatí.

Príklad S1:

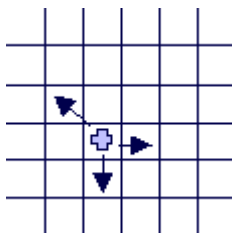
Podarilo sa mi nájsť také číslo, alebo pre všetky prirodzené čísla x platí, že buď x^3+x alebo x^3-x je deliteľné 10? Ak áno, uveďte aké, ak nie, napíšte prečo nie.

Z ostatných hodín som naozaj nič nemal (preto sa učte jazyky!), takže moja posledná záchrana bola v hrách. To bol výberový predmet, kto by si ho nevybral, že? Zakaždým si mal niekto iný pripraviť nejakú zaujímavú hru, ktorá ostatných naučí a zahrajú si ju alebo sa inak zabavia. Samozrejme, že keď som tam bol iba týždeň, tak chceli, aby som im niečo predviedol. Nemal som potuchy ako a čo mám pripraviť, tak som sa popýtal tých, čo už niečo ukazovali predchádzajúce týždne. Pred týždňom sa hrali na obchodníkov. Každý si mal doniesť pár svojich maličkostí (aby bolo čo kupovať) a určila sa ich cena: za 2 peniaze ste si mohli kúpiť buď 6 pierok alebo 4 guľôčky alebo jedno céčko. Pravidlá hry boli také, že každý dostal na začiatku 100 peňazí a vyhrá ten, kto si za presne týchto 100 peňazí kúpi presne 100 kusov maličkostí. Podarilo sa to vraj viacerým hráčom, no žiadny dvaja nemali rovnaký počet pierok, guľôčok, či céčok. Mňa by teda naozaj zaujímalo, koľko bolo tých šťastlivcov. (Najmenšia hodnota, za ktorú sa mohlo nakupovať bol jeden peniaz.)

Príklad S2:

Najviac koľko mohlo byť šťastlivcov a koľko by mali pierok, guľôčok a céčok?

Pred dvoma týždňami zase hrali hru na poklady. Stačí na to iba šachovnica (8×8) a jedna figúrka. Predstavte si, že každé šachové políčko je miestnosť s pokladom. Úlohou je samozrejme zobrať všetky poklady a čo najrýchlejšie - teda nevracajúc sa do vybraných miestností. Začínate v ľavom hornom rohu šachovnice (teda ako by ste práve prechádzali prvou miestnosťou a vyberali z nej poklad) a najpodstatnejšia vec: figúrka sa vie po šachovnici pohybovať iba spôsobom znázorneným na obrázku. Keď som sa to skúšal hrať, vždy mi zostalo pár nevybraných miestností a práve som nemal ani čas, ani trpezlivosť sa tým zaoberať. Možno vám to pôjde lepšie.



Príklad S3:

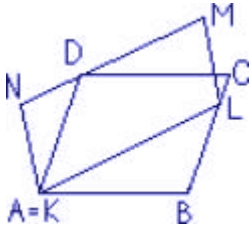
Viete zobrať poklad z každej miestnosti tak, aby ste každou z nich prešli práve raz? Nezabudnite pridať aj svoje vysvetlenie.

Pred tromi týždňami hádali päťciferné číslo. To možno niektorí poznáte, keď sa napr. hovorí: "Dve cifry na správnom mieste jedna na nesprávnom." No a boli tam aj dve pomôcky. Prvá bola, že každá cifra hľadaného čísla je väčšia alebo rovná 5 a druhá, že keď v hľadanom čísle poprehadzujeme číslice a potom ho sčítame s pôvodným číslom, dostaneme 146245. Že vraj tú hru hrali strašne dlho a ani ju nedohrali. To sa mi zdalo zvláštne, veď mali dve také skvelé pomôcky. Tak mi napadlo, že či vôbec ten súčet 146245 je správny. Čo keď sa zadávateľ pomýlil a zle sčítal svoje čísla?

Príklad S4:

Pomýlil sa alebo sa nepomýlil?

Tak keď už som bol poučený, ako má predvádzanie hry vyzerat', tak som si spomenul na svoje prázdniny u dedka, ako som lepil lichobežník a počítal jeho obsahy. Pri tom počítaní som zistil aj mnoho iných zaujímavých vecí. Na prvý pohľad to vyzeralo ako kúzlo. Napr. som si zoberal dva vhodné rovnobežníky ABCD a KLMN a uložil ich takým spôsobom, aby $A=K$, $L \in BC$ a $D \in MN$. Potom som spočítal ich obsahy a vyšlo, že sú rovnaké.

**Príklad S5:**

Zistite, či pre každé dva rovnobežníky, ktoré sa dajú daným spôsobom uložiť', platí, že majú rovnaký obsah.

Mojim zahraničným kamarátom sa to zdalo ako narafičená náhoda. Bol som z toho smutný. Ale povedal som si, že keď sa im toto nepáčilo, snád' sa im bude páčiť' zrakový test. Spýtal som sa ich, či už všetci niekedy videli štvorec. Videli. Tak som im nakreslil obrázok s tromi priamkami a , c , p ($a \parallel c$, p je s nimi rôznobežná) a spýtal som sa ich, či ho tam aj teraz vidia? Nevideli. Tak som im povedal, nech sa len lepšie dívajú, že predsa $A \in a$, $B \in p$, $C \in c$, $D \in p$. Potom už mnohí videli môj štvorec ABCD. Niektorí však tvrdili, že žiadny taký neexistuje.

Príklad S6:

Ak taký štvorec existuje, napíšte postup, ako by ste ho v danej situácii narysovali a ak neexistuje, zdôvodnite to. A nezabudnite svoje riešenie pekne zdôvodniť.

Nakoniec som bol celý rád, keď som sa vrátil domov a mohol som tu chodiť do svojej skvelej školičky. Zrazu som všetkému rozumel a to ma veľmi tešilo.

Riešenia príkladov 1. série nám pošli najneskôr 5. novembra 2001 (rozhodujúca je pečiatka pošty) na adresu:

PIKOMAT 7-9

P-MAT, n. o.

P. O. Box 2

814 99 Bratislava 1

Tak ako po minulé roky aj teraz Ťa prosíme, aby si svoje riešenia poslal načas, pretože inak máme problémy s ich opravením. A okrem toho uškodíš aj sebe, pretože za každý deň omeškania Ťi odpočítame 1 bod. Tvoji opravovatelia :-).