PIKOMAT
Vzorové riešenia 2. série zimnej casti kategórie 7-9

Príklad S1: opravoval Martin Malic Handlovič

Najskôr si ukážeme, ako sa daný výraz správa pre čísla od 1 po 10. Ak si to urobíte, tak zistíte, že to platí. 1-1=0, 8+2=10, 27+3=30, 64-4=60, 125+5=130, 256-6=250, 343+7=350, 512+8=520, 729-9=720 a konečne 1000-10=990. Teraz si musíme uvedomiť, že čísla ktoré sa končia na cifru 1 majú v tretej mocnine na mieste jednotiek opäť 1, ako číslo 1 na tretiu. Podobne majú čísla končiace na 2 vtretej mocnine na konci 8, atď (to sa dalo dokázať niekoľkými spôsobmi). Teda aby to platilo pre všetky čísla, stačí to ukázať pre čísla od 1 po 10 a to sme už dokázali. HURA!!!! :)

Bodovanie: Veľa z Vás má 5 bodov, ale inak bolo za ukázanie platnosti len pre niekoľko čísel od 1 až po 2 body, podľa kvality. Ďalšie body boli za vysvetlenie rovnakej cifry po vynásobení na tretiu. Za to bolo asi od 0 po 2,5 bodu. A za zvyšok bolo 0,5 bodu. Takže tak.

Príklad S2: opravoval Mišo Priky Prikle

Ahoj deti!!! :-) (neskôr výber oslovenia odôvodním)
Tak to už teda máme zas za sebou - hlavne, že som to prežil :-). Trocha som sa tohto príkladu obával, lebo keď som si ho riadne prečítal, tak ma napadol jeden spôsob, ktorým to riešiť, no ten sa učí na strednej (volá sa to Diofantovské rovnice), no ... prekvapili ste. Resp. ste na to išli úvahami a niektorí to robili aj cez tie rovnice a ani o tom nevedia :-). Ale však to je jedno. Spôsobov ako na to je ozaj veľa, no ... aby som si už aj ja konečne mohol odpočinúť (zas som nad vašimi riešeniami strávil dve bezsenné noci :-)), tak si spomenieme len jeden a to ten najjednoduchší (teda aspoň podľa mňa). Tak poďme rýchlo na to, nech to už mám za sebou.
Takže sme vedeli, že za dva peniaze môžeme kúpiť buď šesť pierok alebo štyri guličky (už sa mi o tom aj snívalo :-)) alebo jedno céčko. Prvé čo ma veľmi zarazilo bolo, že kopa ľudí mi písala taký dotaz, že čo sú to tie céčka? Že by to už v dnešnej dobe ozaj neexistovalo??? Beriem nie je to "in", však teraz sú len pokémoni, či čo, no ... :-). No napäť k príkladu. Vypočítame si cenu za jednu maličkosť z každého druhu. Zistím, že jedno pierko stojí 1/3 peniaza, jedna guľôčka stojí 1/2 peniaza a jedno céčko, stojí 2 peniaze. Pre zjednodušenie zápisu si zvolíme nejaké označenie : p - počet pierok ; g - počet guličiek ; c - počet céčok. Čo vy na to, môže byť??? :-). Potom z údajov, ktoré boli v zadaní si môžeme zostrojiť dve rovničky s tromi neznámymi a potom už hádam dačo vymyslíme :-), čo s tým ďalej.
$p + g + c = 100$ Ţ táto rovnička vraví to, že počet všetkých kúpených maličkostí je 100
$1/3\ p + 1/2\ g + 2\ c = 100$ Ţ táto rovnička zas vraví, že peňazí, za ktoré sme kupovali maličkosti, bolo tiež 100
Malými úpravami potom získame rovničky:
$2\ p + 3\ g + 12\ c = 600$
$12\ p + 12\ g + 12\ c = 1\ 200$
Ich odčítaním a "kozmetickými" úpravami získame vzťah : $p = 60 - 9\ g / 10$
Toto ešte zvládla väčšina z vás, no teraz príde to čosi zákerne ťažké, čím ste sa už nie všetci prekúsali :-). Trebalo totiž aj trochu rozmýšľať :-). Zo zadania vieme, že p, g, c musia byť celé nezáporné čísla a podľa nášho vzťahu, ktorý sme pred chvíľkou získali, bude p celočíselné len vtedy, ak ... g bude násobkom 10. Dôležité si bolo však uvedomiť, že to môže byť aj 0 - násobok desiatky. V zadaní totiž nie je vylúčená možnosť, že niektorý zo šťastlivcov má len dva druhy maličkostí. No a zároveň vidíme ešte z nášho vzťahu, že to môžu byť násobky 10 maximálne po 60, lebo pre $g = 70$, by nám už vyšlo záporné p. No a teraz si už spravíme len tabuľku, v ktorej za g budeme do dosádzať od 0 po 60, p si vyjadríme z nášho vzťahu a c získame jednoduchým doplnením na 100 ($c = 100 - p - g$).

Počet štaslivcov	Počet pierok	Počet guľôčok	Počet céčok
1	60	0	40
2	51	10	39
3	42	20	38
4	33	30	37
5	24	40	36
6	15	50	35
7	6	60	34

Čiže sme zistili, že mohlo byť najviac 7 šťastlivcov. Viacerí ste našli len štyroch, no boli aj takí, čo našli ôsmich, deviatich :-), takže v konečnom dôsledku sa to vyrovnalo :-). Ako som už pred tým spomínal, je mnoho spôsobov, ako tento príklad zriešiť, mnohí ste na to išli cez iné úvahy o deliteľnosti čísel, niektorí z vás tam našli nejakú postupnosť a pod. Uznával som všetky tieto riešenia, ak boli správne. Hodnotil som asi tak, že za správny počet šťastlivcov som dával jeden bod, za správne počty maličkostí som dával tiež bod, dva body za správny spôsob riešenia a jeden bod za uvedomenie si informácií zo zadania = tie rovničky. A samozrejme tam je benevolencia plus pól bodu za nejaké správne

poznámky, prípadne mínus pól bodu za nejaké chýbajúce maličkosti. No a ako som na začiatku sľúbil, musím vysvetliť to oslovenie. No ... niektorí už asi tušíte - tí, ktorých sa to týka. Áno, zas ste opisovali. Neviem už presne kto alebo odkiaľ (boli ste zas viacerí) to bolo a nechce sa mi to už hľadať, no uvedomte sa a nebuďte malé deti. Beriem, poradiť sa o riešení, no ... od slova do slova to opísať??? No zdá sa mi, že Topoľčany sa opäť nezapreli a ... držali spolu a spolupracovali. Baby ... please!!! :-). Samozrejme, že som strhával body. No a keď som už pri tom strhávaní bodov, tak ... ak mi niekto bude posielať 8 - 10 stranové riešenia príkladov, ktoré sa dajú vyrátať na 1 maximálne 2 A4 - ky, tak ... budem zlý :-). Však to je týranie. Jedno také riešenie som opravoval asi hodinu, čo som vždy po 2 - 3 vetách prestal. Please, nepreháňajte to s tým vysvetľovaním a neopakujte zbytočne viackrát banálne veci!!!
ETO VSJO

Príklad S3: opravoval Palo Palo Minárik

Ako ste skoro všetci zistili, šachovnica sa pri dodržaní daných pravidiel prejsť nedá. Problém bol, ako to dokázať. Samozrejme, spôsobov bolo viac. Tu je jeden, ktorý sa mi veľmi páčil. Šachovnicu si označíme nasledovným spôsobom: prvé políčko - 1; políčka, na ktoré sa z neho môžeme dostať - 2; ďalšie - 3 a opäť 1, 2, 3…

1 2 3 1 2 3 1 2
2 3 1 2 3 1 2 3
3 1 2 3 1 2 3 1
1 2 3 1 2 3 1 2
2 3 1 2 3 1 2 3
3 1 2 3 1 2 3 1
1 2 3 1 2 3 1 2
2 3 1 2 3 1 2 3

Teraz, akýmkoľvek spôsobom budeme prechádzať šachovnicu, políčka pôjdu v poradí 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1… Keď sa na očíslovanú šachovnicu pozrieme pozorne, zistíme, že jednotiek je 21, dvojok je 22 a trojok 21. To znamená, že ak prejdeme 21 jednotiek, 21 dvojok a 21 trojok mali by sme ísť opäť na jednotku, aby sme sa dostali na 22. dvojku. Ale voľná jednotka už nie je. Preto vždy ostane jedna dvojka neprejdená. Celá šachovnica sa teda nedá prejsť.

Bodovanie: za správnu odpoveď 2 body; za zdôvodnenie 3 - tu som dával body podľa toho, ako úplné a presvedčivé bolo vaše zdôvodnenie.

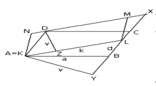
Príklad S4: opravovala Dáša Horáková

V príklade bolo treba rozhodnúť, či sa zadávateľ pomýlil alebo nepomýlil, teda, či existujú také dve čísla, ktorých súčet bude 146245, pričom prvé číslo má mať všetky cifry aspoň päťky a druhé dostaneme z prvého poprehadzovaním cifier. Nikomu z vás sa nepodarilo nájsť také dve čísla, pre ktoré by to platilo. Vyzerá to tak, že zadávateľ sa skutočne pomýlil. To však treba dokázať. Ako na to? Väčšina z vás si povypisovala všetky možnosti (niektorým sa to síce nepodarilo a na niektoré zabudli) a potom ukázala, že žiadna z nich nevyhovuje. Dalo sa to urobiť ešte jednoduchšie. Už pri sčítaní dvoch najmenších možných číslic, ktoré sa môžu v čísle vyskytovať 5 + 5 = 10 sa dostávame cez desiatku. Teda keď si čísla napíšeme pod seba a sčítame ich, dostaneme pod každým stĺpcom súčet aspoň 10. Musí teda platiť E + T = 15, D + S = 13 (lebo nám jedna ostala z predchádzajúceho stĺpca), C + R = 11, B + P = 15 a A + O = 13. Teraz si môžeme zrátať súčet všetkých číslic z jedného aj z druhého čísla, teda
A + B + C + D + E + O + P + R + S + T = (A + O) + (B + P) + (C + R) + (D + R) + (E + S) =
= 15 + 13 + 11 + 15 + 13 = 67
Hocaká číslica, ktorá sa nachádza v jednom čísle sa bude nachádzať aj v druhom čísle a teda súčet číslic z oboch čísel musí byť párny. Ale číslo, ktoré nám vyšlo ako súčet (67) je nepárne. Teda nemôžu existovať takéto čísla a zadávateľ sa musel pomýliť.

Bodovanie: Za úplné riešenie 5b, za chýbajúce nedostatočne zdôvodnené alebo nedokonalé riešenia ste mohli stratiť až 4,5 bodu. Za stručnú odpoveď, že sa zadávateľ pomýlil bez ďalšieho vysvetlenia bolo 0,5b.

```
 ABCDE
+OPRST
146245
```

Príklad S5: opravovala Efka Rosíková



Dôkaz rovnosti obsahov udaných rovnobežníkov sa dal riešiť v zásade dvoma spôsobmi - jedným "obrázkovým" založenom na princípe na " jedným útvarom vyplň druhý" alebo využitím podobnosti trojuholníkov ΔAZD a ΔLYA, kde využitím tejto vlastnosti získame rovnosť $d.v_d = k.v_k$, t.j. $S_{ABCD} = S_{KLMN}$. V každom prípade je vhodné mať ozrejmené, že obsah rovnobežníka vypočítame ako obsah podstavy krát výška, t.j. $S = a.v_a$

.Chcem ukázať, že pri ľubovoľnej polohe bodu L na úsečke BC a zachovaní podmienok A=K, D patrí MN, môžem rovnobežník KLMN symbolicky "rozstrihať" a "naukladať" do rovnobežníka ABCD - vtedy sa ich obsahy totiž jednoznačne rovnajú. Rovnobežník KLMN je vzhľadom na rovnobežník ABCD, ako vidno z obrázka, dosť "neprakticky posunutý". Avšak rovnobežník KLMN má rovnaký obsah s ľubovoľným iným rovnobežníkom, ktorý má rovnakú základňu a výšku. Preto môžem vhodne predĺžiť strany BC a MN - vznikne mi bod X, ktorý je jedným z vrcholov rovnobežníka KLXD=ALXD, ktorého obsah je zhodný s obsahom rovnobežníka KLMN (majú zhodnú základňu a výšku). Zároveň rovnobežník ALXD má s rovnobežníkom ABCD zhodnú stranu AD a výšku. Odtiaľ vyplýva, že majú takisto rovnaký obsah. A ak platí, že obsah rovnobežníka ABCD je zhodný s obsahom rovnobežníka ALXD a zároveň obsah rovnobežníka KLMN je zhodný s obsahom rovnobežníka KLXD=ALXD, tak potom platí, že obsah rovnobežníka ABCD je zhodný s obsahom rovnobežníka KLMN.
Na záver ešte bolo potrebné povedať, že tento postup je korektný pri ľubovoľnej polohe bodu L na úsečke BC a overiť, že je to tak aj v "krajných polohách" (B=L, resp. C=L).

Bodovanie:
- preverenie niekoľkých konkrétnych prípadov výpočtom: 0,5-1,5 b (podľa počtu overení a komentára)
- preverenie niekoľkých polôh "všeobecne" (napr. B=L, C=L, L leží v polovici BC, atď): 1-3 b (podľa počtu overení a komentára)
- bez "zovšeobecňujúceho komentára" (že je jedno, kde na úsečke BC leží bod L, že je úvaha v poriadku aj pre prípady B=L, resp. C=L a pod.): -0.5 b

Príklad S6: opravovala Alenka Kovárová

Takže podľa zadania máme dané priamky a, c, p, pričom a a c sú rovnobežné a p je s nimi rôznobežná. Máme narysovať štvorec tak, aby $A \in a$, $C \in c$, $B,D \in p$. Stačí, ak si uvedomíme, že uhlopriečky štvorca sú rovnako dlhé, na seba komé a vzájomne sa rozpoľujú. Postup konštrukcie: 1. X,Y; $X=p \cap a$, $Y=p \cap c$, 2. S; S= stred úsečky XY, 3. r; r je kolmé na p a $S \in r$, 4. A,C; $A=a \cap r$, $C=c \cap r$, 5. k; k (s,|SA|), 6. B,D; $B,D=k \cap p$, $B \cap D$, 7. štvorec ABCD. No, ale z postupu konštrukcie ešte nevyplýva, že to, čo podľa nej narysujeme, je naozaj štvorec. Pochybnosti sú v podstate iba v tom, či |SA|=|SC|. Ak sa rovnajú, potom je zrejmé, že je to štvorec, lebo tak sme ho konštruovali. Ak sa nerovnajú, nie je to štvorec. Vieme, že tieto dve úsečky sú stranami trojuholníkov ASX a CSY. Tieto trojuholníky sú zhodné, lebo |SX|=|SY|, uhol pri vrchole S je v oboch trojuholníkoch pravý (obe tvrdenia vyplývajú z konštrukcie), a uhol AXS = uhol CYS sú tiež rovnaké, lebo sú súhlasné. Takže podľa vety usu sú trojuholníky rovnaké, teda aj |SA|=|SC|. Teda to, čo narysujeme bude naozaj štvorec. Sami môžete porozmýšľať, či úloha bude mať riešenie, keď p bude kolmá na a, alebo keď a bude zhodná s c.

Bodovanie: Ak niekto neukázal, že to, čo narysoval je v skutočnosti štvorec, tak 4 body. Bez odôvodnenia správnej konštrukcie 3 body. Konštrukcia iba pre uhol medzi p a a = 45° 2 body.