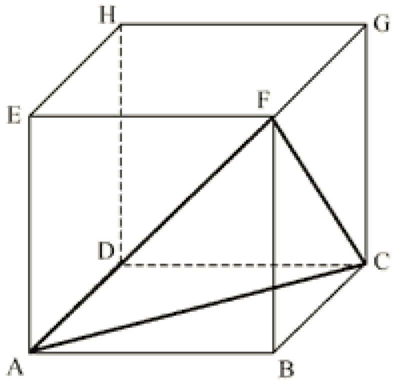
PIKOMAT
Vzorové riešenia 3. série zimnej casti kategórie 7-9

Príklad S1: opravoval Palo Cvik

Veselé Vianoce želám. Tento príklad ste v podstate mohli zobrať ako náš vianočný darček, pretože bol taký ľahký. No ale keďže nie úplne všetci ste ho mali úplne správne, tak sa pozrime na to, ako sa mala úloha riešiť.



Väčšina z vás si všimla, že na výpočet uhla CFA môžeme využiť trojuholník CFA. Pozrime sa teda na to, aké má strany. Aj tu ste si správne všimli, že všetky jeho strany sú uhlopriečky strán. Keďže sa jedná o kocku, tak musí mať všetky steny rovnaké. Všetky steny sú štvorce a teda musia byť rovnaké, to znamená, že dĺžky ich strán sú rovnaké. To znamená, že aj ich uhlopriečky musia byť rovnaké. Toto všetko bolo treba napísať, nestačilo iba vyhlásiť, že trojuholník je rovnostranný. A práve tu niektorí z vás úplne zbytočne postrácali body. No a teraz vieme, že trojuholník CFA je rovnostranný. A takisto vieme, že všetky uhly v rovnostrannom trojuholníku sú rovnako veľké a majú veľkosť 60°. Teda aj uhol CFA, čo je uhol ktorý nás zaujíma, má veľkosť 60°. A keby sme to boli povedali, výťah by bol zastal.

Bodovanie: Za správny výsledok 2 body, za nájdenie rovnostranného trojuholníka 2 body a za zdôvodnenie toho, že je rovnostranný podľa presvedčivosti 0 - 1 bod. Za napísanie vecí, ktoré vôbec neplatili, teda za zlé zdôvodnenia sa strhávali body podľa závažnosti chýb.

Príklad S2: opravoval Mišo Priky Prikle

Ahojte! Fazuľky a hrášky dopadli veľmi dobre. Veď to bol aj ľahulinký príklad. No našlo sa zopár ľudí, ktorí zle pochopili zadanie, tak tu je pre istotu správne riešenie.
Celé sa to dalo riešiť mnohými spôsobmi, no spomenieme si ten najjednoduchší. Máme 4 rôzne kôpky fazuliek, označme si ich x, y, z, w. A vieme, ako si bytosti cenia fazuľky a že mi za ne všetky dali rovnaký počet hráškov. Čiže platí $x - 4 = y + 4 = z / 4 = 4 w = a$ (to a sme sem pridali pre zjednodušenie situácie, aj keď to tak na prvý pohľad nemusí vyzerať).
A ešte vieme, že $x + y + z + w = 100$. Najjednoduchšie riešenie je vyjadriť si x, y, z, w pomocou jednej neznámej - a, čo sa dá jednoducho:
$x = a + 4 \quad y = a - 4 \quad z = 4 a \quad w = a / 4$
A teraz to už len celé dosadíme do našej základnej rovnice:
$a + 4 + a - 4 + (4 a) + (a / 4) = 100$
Vynásobíme 4, upravíme a zistíme, že a = 16. To je počet hráškov, ktoré mi dala každá bytosť. A teraz, keď dosadíme 'a' do našich vzťahov, tak zistíme, koľko fazuliek som dal tej ktorej bytosti: x = 20 ; y = 12 ; z = 64 ; w = 4.

Komentár a bodovanie: Najčastejšia chyba bola, že ste to pochopili tak, že aj ja som dostal 100 hráškov. Také riešenie bolo za 0,5 b. Za nedostatky som strhával 0,5 - 1 b. Majte sa!

Príklad S3: opravoval Martin Malic Handlovič

Vďaka zlému príkladu v zadaniach sa stalo, že zopár z vás, a nebolo vás málo, si príklad značne uľahčili a poľahky získali 5 bodov. Čo už. Správna hodnota čísla 59 je 59, 35 je 35, a pod. Ak ste si nevypísali všetky možnosti, pozdravujem asi polku riešiteľov, tak sa to robilo nasledovne:
Rovnica $a + b + (a - b)^2 = 10a + b$ sa upravila do tvaru $(a - b)^2 = 9a$.
Keďže na ľavo máme štvorec, tak aj na pravo musí byť štvorec a to je len pre a = 0, 1, 4, 9. Ľahko potom dopočítame tri riešenia 00, 14 a 90. Posledné štvrté nevýjde, lebo b sa nemôže rovnať 10. Tí, čo si to uľahčili dostali rovnicu $(a - b) = 0$, teda jasne im vyšlo, že riešenia sú 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Bodovanie: Za výsledok max. 1 bod, za postup ďalšie 2 body a za komentár zvyšné 2 body. Tí, čo ste napísali, že ste vyskušali všetky možnosti a dačo vyšlo, ste dostali málo bodov, lebo ak to neviete urobiť rovnicou, tak to nevadí, ale pri skúšaní treba teda naozaj oskúšať všetky možnosti a potom ich napísať aj na riešenie.

P.S: Špeciálnu vianočnú prémiu chcem udeliť Diane Odrobinákovej, lebo ako jediná vyriešila príklad aj pre obidve vysvetlenia zadania. Gratulujem!!! :)

Príklad S4: opravovala Efka Rosíková

Pre úspešné vyriešenie príkladu bolo najdôležitejšie uvedomiť si, ktoré cifry z množiny {0, 1, …, 9} sú vlastne prvočísla. Sú to cifry 2, 3, 5, 7. 1 nie je prvočíslo! Potom bolo zrejme najrýchlejšie riešiť príklad "silou", t.j. pomocou výpočtovej techniky urobiť tabuľku všetkých možných súčinov dvoj- a trojciferných čísel zložených z týchto cifier, vrátane medzivýpočtov a vybrať z nich ten vhodný (pozri nižšie). Celkový počet týchto výpočtov (1024 = 64 trojciferných x 16 dvojciferných čísel, zložených z cifier 2, 3, 5, 7) bolo možné znížiť niekoľkými ďaľšími úvahami: Na mieste stoviek v trojcifernom čísle, ani na mieste desiatok v dvojcifernom čísle, ani na mieste jednotiek v žiadnom z nich nesmie byť cifra 2 - v prvom aj druhom prípade by súčin bol iste menší ako 22222, čo je najmenší "prvočíselný" výsledok (pretože aj 277 . 77 = 21329 aj 777 . 27 = 20979). Keby zas na mieste jednotiek bola dvojka, dostaneme iste niekde v medzivýpočte párne číslo rôzne od 2, a to nemôže byť prvočíslom). Podobne môžeme zistiť, že oba činitele (PPP a PP) môžu končiť len "dvojicami" 3 a 5, 5 a 5, 5 a 7, lebo inak by sme v prvom medzivýpočte (PPPP) nemali ako poslednú cifru prvočíslo (napr. 7.7 = 49). Podobných úvah je možné spraviť viac, ku konečnému výsledku treba ale predsa urobiť niekoľko "skúšaní". Teraz je zrejme najjednoduchšie urobiť si tabuľku medzivýpočtov:

PPP	PPP.3	PPP.5	PPP.7	|	PPP	PPP.3	PPP.5	PPP.7
323	969	1615	2261	|	537	1611	2685	3759
325	975	1625	2275	|	553	1659	2765	3871
327	981	1635	2289	|	557	1671	2785	3899
333	999	1665	2331	|	573	1719	2865	4011
335	1005	1675	2345	|	575	1725	2875	4025
337	1011	1685	2359	|	577	1731	2885	4039
353	1059	1765	2471	|	723	2169	3615	5061
355	1065	1775	2485	|	725	2175	3625	5075
357	1071	1785	2499	|	727	2181	3635	5089
373	1119	1865	2611	|	733	2199	3665	5131
375	1125	1875	2625	|	735	2205	3675	5145
377	1131	1885	2639	|	737	2211	3685	5159
523	1569	2615	3661	|	753	2259	3765	5271
525	1575	2625	3675	|	755	2265	3775	5285
527	1581	2635	3689	|	757	2271	3785	5299
533	1599	2665	3731	|	773	2319	3865	5411
535	1605	2675	3745	|	775	2325	3875	5425
555	1665	2775	3885	|	777	2331	3885	5439

Odtiaľ vidím, že vhodné (prvočíselné) "medzivýpočty" (PPPP) sú len štyri. Tie mi potom už stačí len vyskúšať "sčítať pod seba" a overiť zachovanie prvočíselnosti výsledku:
t.j. napr.:

```
  325
 . 77
-----
 2275
2275
-----
25025
```

nie je správne, pretože 0 nie je prvočíslo. Po tomto overení mi ostane len dvojica 775 a 33, teda podlaha sa skladala z 25575 kachličiek (mala rozmery 775 x 33).

Bodovanie: Riešenie s predpokladom, že 1 je prvočíslo: 1 - 2 body (podľa podrobnosti úvah). Správne riešenie: 1,5 - 5 bodov. (podľa podrobnosti úvah, resp. ak niekto chcel overovať všetky možnosti, koľko ich skutočne overil, na ktoré "vetvy riešenia" zabudol)

Príklad S5: opravovala Táňa Viszusová

Vzorové riešenie tohto príkladu je tak neuveriteľne stručné a jednoduché, že mi to nedá nenapísať sem aj to, aká bola väčšina z vás šikovná, pretože plný počet bodov sa pri tomto príklade rozdával veľmi často. No a teraz k veci. Označme si ako x počet všetkých, ktorí boli prítomní. Z nich za mňa hlasovalo v prvom kole iba x - 5 ľudí, pretože tí traja, čo sa zdržali, mi svoj hlas nedali, rovnako ako tí dvaja, čo boli proti. No a v prvom kole ma neprijali. Na prijatie potrebujem, aby za mňa hlasovali aspoň 2/3 všetkých prítomných. Teda musí platiť nerovnica x - 5 < 2/3.x. Po úprave dostaneme x < 15. Pozrime sa teraz na druhé kolo.Jeden z tých, čo boli proti mne, mi dal svoj hlas, teda počet ľudí za mňa sa dá vyjadriť ako x - 4 (= x - 1 - 3) . No a keďže teraz ma zobrali, musí platiť nerovnica x - 4 ł 2/3.x. Jej úpravou dostaneme x ł 12 (preto je tu ł a nie iba >, lebo v zadaní stálo, že ak sú aspoň 2/3.x za, som prijatý). No a keďˇže počet ľudí musí byť celé číslo, do úvahy prichádzajú iba čísla 12,13,14 (aby vyhovovali obom získaným nerovniciam). Dosadením ľahko overíme, že naozaj spĺňajú aj podmienky zo zadania.

Bodovanie: Tí čo našli všetky tri riešenia mali od 3 do 5 bodov v závislosti od vysvetlenia riešenia, ak niekto prehlásil za riešenie iba 12 má od 4 do 0,5 bodu v závislosti od toho, kde urobil chybu. Ostatných už nebolo veľa a majú bodíky podľa toho, na čo všetko pozabúdali.Tak tak.

Príklad S6: opravovala Dáša Horáková

Mali ste zistiť, ktorému z policajtov vyšli vyššie percentá. Ako na to? Rôzne, od menej či viac presných úvah, až po vyriešenie nerovnice. Označme si počet preplnených autobusov P, počet nepreplnených autobusov N. Potom počet všetkých autobusov bude P + N.
Prvý policajt si teda zapíše číslo P/(N + P). Teraz sa skúsme pozrieť, čo by si zapísal druhý policajt. V preplnenom preplnenom sa musí viezť aspoň 51 cestujúcich a v nepreplnenom autobuse maximálne 50 cestujúcich. Ak ste si vyskúšali zopár možností, zistili ste, že vyššie percento vychádzalo vždy druhému policajtovi. Jedinou výnimkou boli prípady, keď boli všetky autobusy preplnené (obom policajtom vyšlo 100%) alebo keď boli všetky autobusy nepreplnené (obom vyšlo 0%) Skúsme teda dokázať, že druhému vyjde vždy číslo väčšie alebo rovné ako prvému. Najhorší prípad by bol, keby sa v preplnených autobusoch viezlo čo najmenej cestujúcich, teda 51 a v nepreplnených autobusoch sa viezlo čo najviac cestujúcich, teda 50. Vtedy výde druhému policajtovi najnižšie číslo, ak zostane zachovaný počet preplnených a nepreplnených autobusov. Pretože keby sa napr. znížil počet cestujúcich v nepreplnených autobusoch, tak narastie percento cestujúcich, ktorí sa povezú v preplnených autobusoch, a keď stúpne počet cestujúcich v preplnených autobusoch, opäť stúpne aj percento tých, čo sa povezú v preplnených autobusoch. Čislo, ktoré má zapísané prvý policajt sa meniť nebude, pretože tu nezáleží na počte cestujúcich.
Čo si teda zapíše druhý policajt? 51 . P / (51 . P + 50 . N)
Dopracovali sme sa k dvom zlomkom, ktoré treba porovnať.

$$\frac{51P}{51P+50N}\cdot 100\% \qquad \frac{P}{N+P}\cdot 100\%$$

Aby sme zlomky mohli porovnať, rozšírme prvý z nich číslom 51. Dostaneme zlomok, ktorého čitateľ bude 51P, teda bude rovnaký, ako čitateľ druhého zlomku. V menovateli dostaneme 51 N + 51 P. Zlomky sa líšia jedine v čitateli.

$$\frac{51P\cdot 100\%}{51N+51P} \qquad \frac{51P\cdot 100\%}{51P+50N}$$

Ak predpokladáme, že policajti videli aspoň jeden autobus, tak menovatele budú v oboch prípadoch kladné čísla väčšie, nanajvýš rovné 1. Čím väčší bude menovateľ, tým menšia bude hodnota zlomku. Keďže platí že, 51N + 51P ł 50N + 51P, tak potom aj platí, že druhý zlomok bude väčší ako prvý. Rovnosť bude platiť jedine v už spomenutých dvoch prípadoch, keď P=0 alebo keď N=0. Vo všetkých ostatných prípadoch bude mať druhý policajt zapísané väčšie číslo.

$$\frac{51P\cdot 100\%}{51N+51P} \qquad \frac{51P\cdot 100\%}{51P+50N}$$

Bodovanie: Za vyskúšanie niekoľkých možností 2b, za zistenie, že rovnosť bude platiť v dvoch prípadoch, keď obom výjde rovnako 0,5b, no a zvyšok bol za dôkaz či už nejakými úvahami alebo vyriešením nerovníc.

Tak to je všetko, cez prázdniny si oddýchnite a načerpajte silu na prvú sériu letnej časti, ktorá tu bude čoskoro a s ňou aj váš (dúfame, že obľúbený) seminár.