PIKOMAT
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad M1: opravoval Martin Hriňák

Ak uvažujeme jednociferné čísla, tak riešením je zrejme iba 0. Majme ďalej dvojciferné čísla. Každé z nich sa dá zapísať v tvare 10a+b, kde a, b sú cifry a a≠0. Potom má zo zadania platiť 10a+b-ab=a+b. Odtiaľ 9a=ab, odkiaľ máme b=9 (lebo a≠0). Skúškou sa presvedčíme

, že všetky čísla 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99 vyhovujú. Majme ďalej troj- a viacciferné číslo. Nech má n+1 cifier. Potom sa dá napísať v tvare
$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10^1 + a_0$ kde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sú cifry, pričom $a_n \neq 0$.

Potom dostáveme, že platí $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10^1 + a_0 \times a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$

$a_n \times [(10^n - 1) - a_{n-1} \times ... \times a_1 \times a_0] + a_{n-1} \times (10^{n-1} - 1) + ... + a_1 \times 9 = 0$

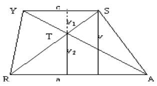
Ale každý zo sčítancov na ľavej strane je nezáporný 10^{k-1} je zrejme vždy kladné, a tiež $(10n - 1) - a_{n-1} \times ... \times a_1 \times a_0 \geq 10_n - 9^n - 1 \geq 0$.

Vidíme, že rovnosť nenastane nikdy, lebo pre n≥2 je vždy $10^n - 9^n \geq 1$. Preto viacciferné čísla nevyhovujú.

Komentár a bodovanie: Úloha bola náročná na presný dôkaz. Výsledok mala väčšina z vás, ale zdôvodnenie bolo typu skúšal som a vyšlo mi to. A čo ak ste na nejaké riešenie zabudli? Veľa z vás vôbec nulu neuvažovalo. Niektorí pokladali za riešenia aj čísla typu 01, ..., 09, to sú ale čísla 1, ..., 9. Ak ste napísali, že pre troj- a viacciferné čísla to nejde bez korektného dôkazu, mohli ste stratiť 2 body. Za každé riešenie ste mohli získať 0,2 bodu. Takže tí, čo skúšali, väčšinou mali 1,8 bodu, lebo nevysvetlili, prečo to vyjde tým ich spôsobom a väčšinou ste zabudli na nulu. A neodpisujte! Neoplatí sa to... (týmto pozdravujem kolektívy riešiteľov z gymnázia na Párovskej 1 v Nitre)

Príklad M2: opravovala Lenka Gažová

Obsah trojuholníkov YSA a YSR je rovnaký $S_{YSA} = S_{YSR} = 5$, lebo výška na stranu YS je u oboch rovnaká a strana YS je spoločná.



$5 = S_{YSA} = S_{TYS} + S_{YSA}$
$S_{YSR} = S_{YST} + S_{YTR}$
$5 = 1 + S_{YTR}$
$S_{YTR} = 4$
$S_{TYS} = S_{YSR}/5 \; cv_1/2 = (cv_2/2)/5v_1 = v/5$
$v_1 + v_2 = v \Rightarrow v_2 = 4v/5 \Rightarrow v_1/v_2 = 1 = k$

Trojuholník RAT je podobný s trojuholníkom SYT. Uhly YTS a RTA sú vrcholové, preto rovnaké - ∠RAT = ∠YTS. Uhly TRA a TSY sú striedavé, preto rovnaké - ∠TRA = ∠TSY.

Trojuholník RAT je štyrikrát väčší ako trojuholník SYT (pomer podobnosti k = 4), teda a = 4c, $v_2 = 4v_1$. Obsah trojuholníka RAT je:
$S_{RAT} = av_2/2 = 4c4v_1/2 = 16(cv_1/2) = 16S_{TYS} = 16$. Obsah lichobežníka dostaneme spočítaním obsahov trojuholníkov: $S_{ASYR} = 1 + 4 + 4 + 16 = 25$.

Bodovanie: S_{RYT} + dôvod 1,5b; S_{RAT} + dôvod 2,5b; S_{ASYR} = 25 1b.

Príklad M3: opravovala Táňa Viszusová

Pozorne sa zahľadím na šachovnicu a následne každému políčku na nej priradím číslo udávajúce koľko iných polí ohrozuje strelec stojaci na tomto políčku. Najvýhodnejšie pre nás je dávať strelcov tam, kde ohrozujú najmenej polí - teda na kraj tabuľky - aby nám ostalo čo najviac neohrozených polí pre ďalších strelcov. Teraz je už postup jednoduchý. Budeme klásť strelcov na kraj tak, aby sa neohrozovali (ohrozené pole si môžeme napríklad vyčiarknuť). Koľko sa nám ich tam podarí nasúkať, to je výsledok.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Je jedno, kam strelcov začneme dávať, pretože polia na kraji sú si rovnocenné No a ešte dve možné rozmiestnenia (bolo ich ale veľa). Maximálny počet jazdcov je teda 14.

S							
S							S
S							S
S							S
S							S
S							S
S							S
S							

P.S. Zadanie sa dalo pochopiť aj ináč, ak bolo riešenie vysvetlené, bolo to v poriadku. Odpoveď v tom prípade bola 64.

Bodovanie:

- iba obrázok bez slov 2,5b
- obrázok + odpoveď maximálne 14 bez zdôvodnenia prečo 3b
- obrázok + skúšal som, alebo obrázok + nejasné vysvetlenie 3,5b
- postup ako ich kládol bez udania príčiny 3,8b
- nejaký drobný náznak príčiny, respektíve nevysvetlenie kľúčových skutočností (prečo sú na kraji a nie v strede 4b
- drobné chyby, nevysvetlenie niečoho, čo by sa ešte malo vysvetliť 4,5b
- odpoveď 64 alebo 14 riadne vysvetlená 5b
- odpoveď 64 slabo vysvetlená 3,8b
- odpoveď 2 s vysvetlením, 13, 12 s obrázkom 1b
- dobré zdôvodnenie bez obrázku 4b - 4,5b

Príklad M4: opravovala Kami Vyslocká

V zadaní je napísané, že sa majú použiť 5, 3 a 1-korunové mince, čo sú všetko nepárne hodnoty. Potom hodnota súčtu dvoch takýchto ľubovoľných mincí musí byť párne číslo. (Stačí vyskúšať: 1+1, 1+3, 1+5, 3+3, 3+5, 5+5 resp. Súčet dvoch nepárnych čísel musí byť párne číslo.) Ak sa má použiť 15 mincí (čo je vlastne 7 mincových dvojíc + 1 minca), ich celková hodnota bude súčet 7 párnych a 1 nepárneho čísla, čo je určite NEPÁRNE číslo. Keďže aj 50, aj 30 sú párne hodnoty, použitím 15-tich nepárnych mincí by sme ich nikdy nedostali. Úloha sa samozrejme dala riešiť aj inými spôsobmi, napr. vypísaním všetkých kombinácií 15 mincí atď.

Bodovanie: 5 -za úplne úžasné riešenie, 4 - za riešenie (aj s myšlienkou !), v ktorom chýbalo zopár možností, 3 - za nedokončenú peknú myšlienku, 2 - za odôvodnenie, že sa to nedá v tvare súčinu nepárnych čísel, 1 - za odpoveď s príkladom skúšania. Za Odtiaľ nedostatočné zdôvodnenia a chýbajúce postupy bolo 0,5 až 2,5 bodov dole. Ďalej - 0,5 pri nezrozumiteľnom (žiadnom) zápise, aritmetickej chybe, tvrdení že z každého druhu mincí musí byť aspoň 1 kus, a podobných podstatných drobnostiach...Tí, ktorí tvrdili, že 3-koruna neexistuje, dostali 0 bodov, pretože nikde v zadaní nie je povedané, že ide o súčasnosť (a navyše kúzelníkovi stačil papierik so súčtom mincí). A tí, ktorí uvažovali o dvoch druhoch mincí (5,3- korunové a 1-korunové) mali riešenia zjednodušené a zväčša teda 5 bodové.

Príklad M5: opravoval AndyŠramko

Vzhľadom na to, že mnohí z vás nevedeli, čo je to číselná sústava píšem na úvod niečo o číselných sústavách. Prirodzené čísla bežne zapisujeme v tzv. desiatkovej sústave. To znamená, že zápis 1987 označuje číslo $1\times10^3 + 9\times10^2 + 8\times10_1 + 7\times10^0 = 1\times1000 + 9\times100 + 8\times10 + 7\times1$. 10 je základ desiatkovej sústavy, čísla 0, 1, ..., 9 sú jej cifry. Každé číslo $n \in N$ možno v desiatkovej sústave jednoznačne vyjadriť v tomto tvare:

$n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + ... + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$. $a_k \neq 0$, $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ $i = 0, 1, ..., k$. Ak sústava bude napr. šestková, tak namiesto desiatky bude vo vzorci šestka atď. Z toho môžeme odvodiť zápis pre hocijakú sústavu. Napr. číslo 1215 v šestkovej sústave môžeme zapísať aj takto:

$1 \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 5 \times 6^0 = 216 + 72 + 6 + 5 = 299$ (v 10-kovej sústave) Cifry danej sústavy so základom z sú čísla od 0 po z - 1, napr. 6-kovej sústavy sú to čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5. Takto isto si rozpíšeme čísla v príklade (číslo x predstavuje x-ovú sústavu a číslo y zas y-ovú):

$21 = 2 \times x^1 + 1 \times x^0 = 2x + 1$

$31 = 3 \times y^1 + 1y^0 = 3y + 1$

$21 = 31 \Rightarrow 2x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow 2x : 3 = y$

$223 = 2 \times x^2 + 2 \times x^1 + 3 \times x^0 = 2x^2 + 2x + 3$

$503 = 5 \times y^2 + 0 \times y^1 + 3 \times y^0 = 5y^2 + 3$

$223 = 503 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 5y^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 5y^2 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 5(2x:3)^2$

$2x^2 + 2x = 5 \times 4x^2 : 9 \Rightarrow 18x^2 + 18x = 20x^2 \Rightarrow 18x = 2x^2 \Rightarrow 9x = x^2 \Rightarrow 0 = x^2 - 9x \Rightarrow 0 = (x - 9).x$

x je 9 alebo 0. Nulovú sústavu však nepoznáme, čiže sústava x-ová je vlastne deviatková. Potom sústava y-ová je šestková.

Premeníme teda číslo 113 z deviatkovej do desiatkovej sústavy. $(113)_9 = 1 \times 9^2 + 1 \times 9^1 + 3 \times 9^0 = 81 + 9 + 3 = (93)_{10}$.

A premeníme číslo 93 z desiatkovej do šestkovej (zistime koľkokrát sa tam nachádza 6^2. Koľkokrát sa potom nachádza 6^1 vo zvyšku a zvyšok nám udá počet jednotiek (6^0)).

93 : 36 = 2 zv. 21

21 : 6 = 3 zv. 3

3 : 3 = 3 zv. 0

Trezor otvorí číslo 233.

Príklad M6: opravovala Dáša Horáková

Dalo sa postupovať rôzne. Niekto len skúšal a našiel, iní si pomohli trochou matematiky. Súčet všetkých čísel domina je 168 = 7×(0+1+2+3+4+5+6), my potrebujeme, aby na každej strane štvorca bol súčet práve 44 - to je spolu 176 = 4×44. Tento súčet je väčší ako 168, pretože tu sme dvakrát započítali rohové políčka. Teda z rozdielu týchto dvoch čísel dostaneme súčet rohových políčok: 176 - 168 = 8 Môže byť v nejakom rohu nepárne číslo, aby súčet strán bol 44? Nemôže, pretože na každej strane štvorca máme 7 celých domín a ešte polovicu.

Keď si uvedomíte, ako sa dominá k sebe prikladajú, bude vám jasné, že každé číslo sa opakuje dvakrát (vedľa seba stojace políčka dvoch susedných kociek), len jedno posledné na jednom rohu nám zostane samé - nemá na tej strane pár. Práve od tohto čísla záleží, či súčet čísel na tejto strane bude párny alebo nepárny. My potrebujeme párne súčty, na rohoch teda musia byť párne čísla. Je len zopár možností pre rohové políčka: 6 2 0 0; 4 4 0 0; 4 2 2 0; možnosť 2 2 2 2 nevyhovuje, pretože máme len 7 domín s číslom 2. No a teraz treba už len skladať a počítať.

Bodovanie: za úplne správne poskladaný štvorec 5 b, za nejaké drobné detaily vo vysvetlení alebo nákrese -0,5 b, za poskladanie štvorca s podobnými ale nie úplne presnými súčtami 1-1,5 b; za štvorec s porušenými pravidlami (opakovanie domin. kociek) 0,5 b; za zistenie, že súčet rohov je 8 a môžu to byť len párne čísla 1,5 b, za nejaké ďalšie chybičky ešte o kúsok menej.