PIKOMAT
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad M1: opravoval Peťo Halák

Pri riešení tohto príkladu si stačilo uvedomiť, že hľadané šesťciferné číslo bude tvaru 100000+X, pričom X je päťciferné číslo. Trojnásobok tohto šesťciferného čísla má byť 10.X+1 (tu už bude jednotka na konci piatich cifier, ktoré zostanú nezmenené). Takto nám vznikne rovnica:

$3.(100\,000 + X)=10.X + 1$

Jediným riešením rovnice je výsledok X=42857.

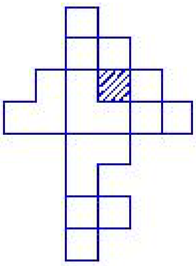
Hľadané šesťciferné číslo je teda 142857. A naozaj, jeho trojnásobok je 428571, teda vyhovuje zadaniu.

Príklad sa dal riešiť aj úvahami - postupným hľadaním cifier hľadaného šesťciferného čísla. Označme si hľadané číslo 1ABCDE (1,A,B,C,D,E sú jednotlivé cifry čísla). Trojnásobok tohto čísla má byť tvaru ABCDE1. Hľadaná cifra E musí teda spĺňať podmienku, že súčin E.3 bude mať na konci cifru 1. Keď si vypíšeme všetky násobky troch, tak zistíme, že jediným jednociferným číslom, ktorého súčin s trojkou má na konci 1, je číslo 7. Z toho vyplýva, že E=7. Na konci už máme číslo ABCD71. Súčin D.3 po pripočítaní "zvyšku" 2 z predchádzajúceho súčinu (7.3=21) musí dať na konci cifru 7. D.3 teda má končiť na 5. Jediným jednociferným násobkom trojky, ktorého súčin končí na 5 je číslo 5, teda D=5. Takto postupujeme ďalej, až kým nedostaneme číslo 142857.

Bodovanie: Prevažná väčšina z vás riešila príklad druhým spôsobom. V prípade, že ste neuviedli, že daná cifra je jediným násobkom 3, ktorá spĺňa podmienku, som strhával 0,2 b. Za neúplné riešenia som dával 2-4 body, za riešenia bez postupu 1 bod.

Príklad M2: opravoval Martin Hriňák

Jedna z možných sietí je takáto:



Komentár: Úloha nebola veľmi náročná, vyskytlo sa veľa rôznych riešení. Ale aj tak sa našli aj takí, ktorí "dokázali" opak. Získať ste mohli 5 bodov za nakreslenú sieť. Niektorým z vás sa stalo, že ste mali nejaké štvorčeky navyše alebo vám chýbali. Ak sa z toho dalo usúdiť, ako ste to chceli poskladať, a rozdiel v počte nebol viac ako 2, tak ste mohli získať až dva body. Ak ste nakreslili iba sieť a neoznačili ste miesta, kde túto sieť treba prestrihnúť, aby sa z nej dal zostaviť plášť telesa zo zadania, mohli ste získať 3 body.

Príklad M3: opravovala Miša Ačová

Rozoberme najprv prípad, že sú oba nápisy nepravdivé. Znegujeme výroky (napíšeme ich opak):

1. V tejto skrinke nie sú choroby, v druhej skrinke nie je múdrosť ani poznanie.
2. V prvej skrinke nie je múdrosť ani poznanie.

Vidíme, že múdrosť a poznanie nemôže byť ani v prvej ani v druhej skrinke. Choroby nemôžu byť v prvej skrinke, ale v druhej skrinke sa o nich nič nehovorí, takže tam môžu byť.

Nech sú teraz oba nápisy pravdivé. Podľa nápisu na 2. skrinke bude múdrosť a poznanie v 1. skrinke. Treba ešte overiť, či tomu neodporuje nápis na 1. skrinke. Ten hovorí, že okrem múdrosti a poznania v 1. skrinke môžu byť aj choroby, ale nemusia - v tom prípade je múdrosť a poznanie ešte aj v 2. skrinke (tieto situácie môžu nastať aj súčasne).

Takže vidíme, že ak niekde múdrosť a poznanie sú, tak sú určite v 1. skrinke, hoci tam môžu byť aj choroby. V 2. skrinke môže byť síce múdrosť a poznanie tiež, ale rovnako tam môžu byť len choroby. Takže vezmeme si prvú skrinku.

Bodovanie: Za overenie každej z týchto dvoch možností (oba pravdivé, oba nepravdivé) ste mohli dostať po 2,5 bodu.

Príklad M4: opravoval Martin Malic Handlovič

Bodovanie: Väčšina z Vás správne pochopila zadanie, ale našli sa aj takí, ktorí si pomýlili počet kusov s hodnotou kvetov. Tí dostali okolo 0,5 bodu. Niektorí z Vás zase nedobre vysvetlili prečo bolo kvetov po 2Sk 135, po 3Sk 136 a po 6Sk 137 kvetov, alebo ste nepochopili, že dvaja ľudia si nemohli kúpiť po 1 kvete. Takto ste dostali len okolo 1,5 až 3 body podľa stupňa vysvetlenia.

Ale poďme k riešeniu: Zo zadania sa ľahko dá vyčítať, že 1. zákazník si kúpil 1 kvet, 2. zákazník 2 kvety a 3. zákazník 3 kvety. Najmenej museli zaplatiť 18 Sk (1×6 + 2×3 + 3×2), najviac mohli zaplatiť 26Sk (3×6 + 2×3 + 1×2). Keďže kvetov bolo na konci rovnako ich počet musel byť deliteľný 11-imi, lebo 2x + 3x + 6x = 11x. Teda cena kvetov bola medzi 1482 (1500-18) až po 1474 (1500-26). Jediné číslo deliteľné 11-imi je číslo 1474. Toto je aj jediné riešenie príkladu. Kvetov po 2 Sk bolo 135, po 3Sk bolo 136 a po 6 Sk bolo 137 kvetov. A ešte dačo neopisujte, lebo sa to neoplatí. Kvetinárka hovorila pravdu.

Príklad M5: opravovala Kami Vyslocká

Úlohou je rozdeliť pás 408 cifier na rôzne časti. Ak chceme mať častí čo najviac, musíme sa pokúsiť vytvárať čo najmenej ciferné časti. (1, potom 2, potom 3, ...).

Otázkou je tiež, koľko častí môže mať rovnaký počet cifier, aby boli časti rôzne. To sú tieto tri: začínajúce 1, začínajúce 2 a začínajúce 3 (iné byť nemôžu, lebo máme len cifry 1,2,3 a tie sa neustále opakujú).

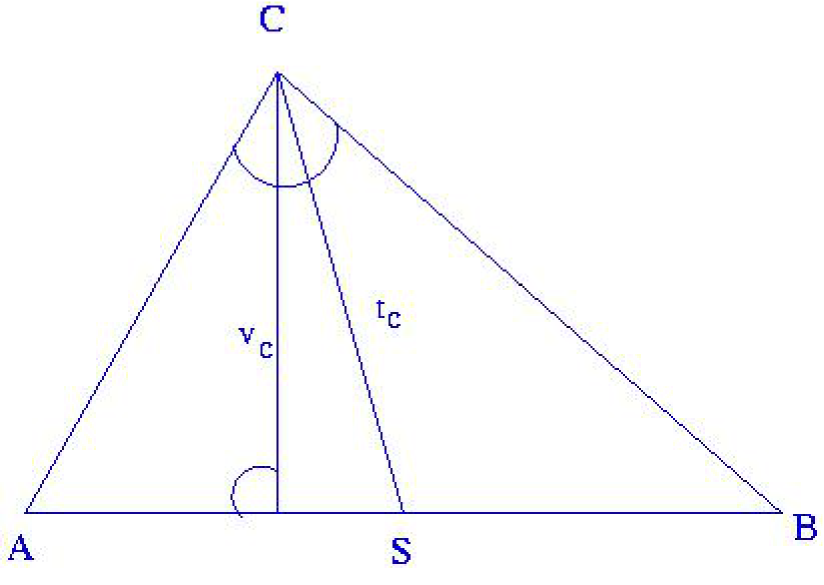
Teda vieme vytvoriť tri jednociferné, tri dvojciferné, tri trojciferné časti atď.

Počet všetkých cifier vo všetkých častiach sa má rovnať počtu cifier na danom páse (t.j. 408). Ľahko nájdeme 408i = 3 × (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16). To znamená, že použijeme všetky možné (3) čísla s počtom cifier od 1 po 16 - spolu preto použijeme 3.16=48 čísel. Viac sa nedá, lebo sme využívali všetky najmenej ciferné čísla, aké sa dali. Počet cifier vyhovuje, no musíme ešte overiť, či by sa daný pás 408 cifier dal rozdeliť na 48 častí tak, aby na každej časti bolo práve to jedno číslo, ktoré by tam byť malo. To dosiahneme napr. oddelením 1, 2, ... 16, 1, 2, ... 16, 1, 2, ... 16 ciferných čísel:
1, 23, 123, 1231, 23123, 123123, 1231231, 23123123, 123123123, 1231231231, 23123123123, 123123123123, 1231231231231, 23123123123123, 123123123123123, 1231231231231231,
2, 31, 231, 2312, 31231, 231231, 2312312, 31231231, 231231231, 2312312312, 31231231231, 231231231231, 2312312312312, 31231231231231, 231231231231231, 2312312312312312,
3, 12, 312, 3123, 12312, 312312, 3123123, 12312312, 312312312, 3123123123, 12312312312, 312312312312, 3123123123123, 12312312312312, 312312312312312, 3123123123123123.

Bodovanie: Za správne riešenie je 1 bod. Za jeho odôvodnenie a vysvetlenie sú 2 body. Za overenie strihania (príp. vysvetlenia prečo sa na dané čísla určite bude dať pás nastrihať) 2 body. Za nepresnosti sa strácalo 0,5-1,5 bodu.

Príklad M6: opravovala Lenka Gažová

Náčrt: $v_c = 3$ cm, $t_c = 4$ cm, $\angle ACB = 90°$

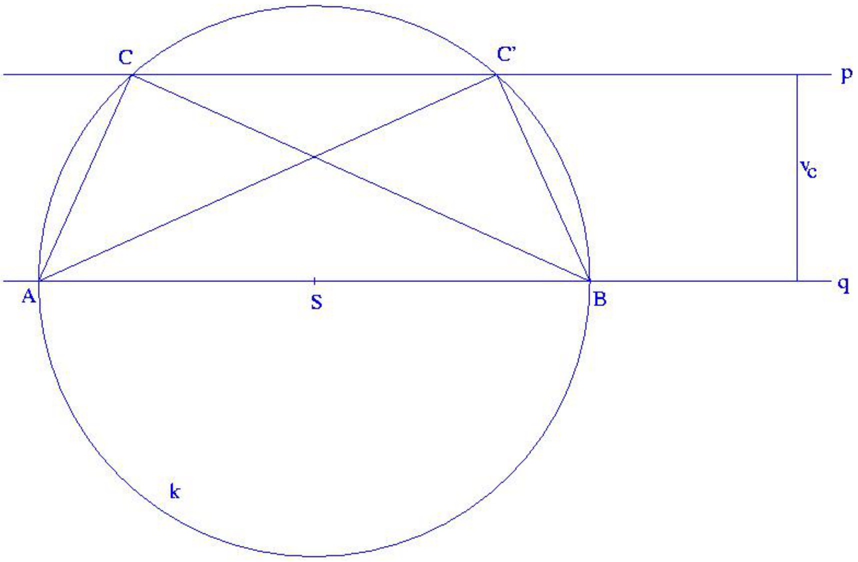


Rozbor:Trojuholník ABC je pravouhlý ⇒ stred opísanej kružnice leží v strede prepony AB ⇒ $|t_c| = |SC|$ je zároveň polomerom opísanej kružnice ($|t_c| = |SC| = r = |SA| = |SB|$) a súčasne určuje dĺžku prepony. Polomer sa rovná polovici dĺžky prepony ($r = |SC| = |SA| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$)

Postup konštrukcie:

1. $p, q; p \parallel q; |pq| = v_c = 3$ cm
2. $S; S \in p$
3. $k; k(S; r = t_c = 4$ cm)
4. $A, B; A, B \in p \cap k$
5. $C; C \in q \cap k$
6. ΔABC

Konštrukcia:



Diskusia: $t_c > vc \Rightarrow$ Úloha má v danej polrovine 2 riešenia

$q \cap k = \{C, C'\}$

($t_c = v_c \Rightarrow$ Úloha má v danej polrovine 1 riešenie

$q \cap k = \{C\}$

$t_c < v_c \Rightarrow$ Úloha nemá riešenie

$q \cap k = \emptyset$)

Bodovanie: za rozbor 1,5 bodu, za postup 1,5 bodu, za konštrukciu 1 bod, za diskusiu 1 bod.