PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Príklad M1: (opravovala Alenka Kovárová)

Úloha sa dala samozrejme riešiť viacerými spôsobmi. Jeden z nich bol, že sme odskúšali, či dnes môže byť Po, Ut, St, Št, Pi So, Ne a vyšlo nám, že dnes môže byť len štvrtok. Ďaľší spôsob mohol byť, že budeme predpokladať, že vlk hovorí pravdu alebo klame. Ak hovorí pravdu, tak to znamená, že včera klamal. Čiže musíme nájsť dva po sebe idúce dni, kde v ten prvý vlk klame a druhý hovorí pravdu. To môžu byť iba dni streda a štvrtok (teda dnes by mohol byť štvrtok). Ak vlk klame, tak to, čo povedal nie je pravda, teda je pravda, že včera hovoril pravdu. Opäť hľadáme dva po sebe idúce dni, ale teraz kde v prvý deň vlk hovorí pravdu a v druhý klame. To sú iba dni nedeľa a pondelok (teda dnes by mohol byť pondelok). Teraz už len stačí overiť, či medveď mohol onú vetu povedať v pondelok alevo vo štvrtok. Ľahko overíme, že iba vo štvrtok.

Chyby vo vašich riešeniach: Ak niekto napísal, že dnes je štvrtok, dostal 2 body za správne riešenie. Ak niekto odskúšal iba Po, Ut, St, Št a skončil, tak dostal 3 body, lebo mal neúplné riešenie. Veď čo keby mala úloha viac riešení? Ak niekto nedostatočne odôvodnil to, čo napísal, tiež som strhávala body.

Príklad M2: (opravoval Charon – Lukáš Medlen)

1.) Aký uhol zviera hodinová a minútová ručička na hodinkách presne o 7:38?

Hodinová Ručička (HR):
0 hod. 0 min. = 0°, 12 hod.0 min. = 12*60 min. = 360°
t.j. H hod., M min. = 360° . (H . 60 + M)/(12 . 60) - *rovnica (1)*

Minútová Ručička (MR):
0 min. = 0°, 60 min. = 360°, t.j. M min. = 360° . M / 60 - *rovnica (2)*
teda o 7:38 bude HR na 360° . (*7* . 60 + *38*) / (12 . 60) = 229°

a MR na 360° . *38* / 60 = 228° rozdiel medzi uhlom MR a HR je teda 229° - 228° = 1°

2.) Môžu takýto uhol zvierať aj v nejakom inom čase? Ak áno, v akom?

z rovnice *(1)* a *(2)* vyplýva, že pre ďalšie časy H : M musí platiť:

$(360° \,.\, (H \,.\, 60 + M) / (12 \,.\, 60) - 360° \,.\, M / 60)| = 1°$
t.j. $|360° \,.\, ((H \,.\, 60 + M - 12M) / (12 \,.\, 60))| = 1°$
t.j. $|360° \,.\, ((60H - 11 \,.\, M) / (12 \,.\, 60))| = 1°$
t.j. $|½° \,.\, (60H - 11M)| = 1°$
t.j. $|60H - 11M| = 2$
z toho
$M_1 = (60H - 2) / 11$
$M_2 = (60H + 2) / 11$

počas dvanásťhodinového cyklu môže H nadobúdať celočíselné hodnoty 0-11 a pre každú z týchto hodnôt existujú dve hodnoty M (M_1 zodpovedá počtu minút, keď MR dobieha hodinovú, potom s ňou zovrie uhol 1°, predbehne ju, a keď sa od nej vzďaľuje a zas s ňou zovrie uhol 1° - to je čas M_2). Po dosadení 0 - 11 za H a vypočítaní M_1 a M_2 vyjdú tieto časy, pri ktorých HR a MR zvierajú uhol 1°: *(údaje nie sú manuálne zaokrúhľované)*

11:59:49.09, 1:05:38.18, 2:10:43.64, 3:16:10.91, 4:22:00.00, 5:27:05.45, 6:32:32.73, 7:38:00.00, 8:43:27.27, 9:48:54.55, 10:54:43.64

0:00:10.91, 1:05:16.36, 2:11:05.45, 3:16:32.73, 4:21:38.18, 5:27:27.27, 6:32:54.55, 7:38:21.82, 8:43:49.09, 9:49:16.36, 10:54:21.82

spolu 22 časov v 12-hodinovom cykle, samozrejme, ďalšie také časy existujú aj popoludní, ale naše hodinky majú len obyčajný ciferník...

Príklad M3: (opravoval Martin MH Hriňák)

Pre vyriešenie tohto príkladu nám stačí uvedomiť si, že 1 / 201 > 1 / 300, 1 / 202 > 1 / 300, ..., 1 / 299 > 1 / 300 (vyplýva to z toho, že 201 < 300, 202 < 300, ..., 299 < 300). Sčítaním týchto 99 nerovností dostávame 1 / 201 + 1 / 202 + ... + 1 / 299 > 99 . (1 / 300). Pripočítaním 1 / 300 k obom stranám nerovnosti dostávame 1 / 201 + 1 / 202 + ... + 1 / 300 > 100 / 300 = 1 / 3, čo sme mali dokázať.

Komentár : Úloha bola jednoduchá. Za riešenia, ktoré čísla na oboch stranách nerovnosti vyčíslili a potom ich porovnali, sa nedalo získať veľa bodov maximálne 2,5 až 3b. Záležalo aj od komentára, ... Viacerí používali priemery, ale ani za tieto riešenia nemohlo byť veľa bodov. Stačí si uvedomiť, že ak A má 2 milióny a B nič, tak priemerne majú po jednom milióne... Vyskytli sa aj takí ktorí opisovali. Tí dostali počet bodov za riešenie vydelený počtom opisovateľov. No a našli sa aj takí, ktorí "dokázali" opačnú nerovnosť...

Príklad M4: (opravovala Kaťa Antoničová)

Najskôr sa pozrime na náramky s uzáverom. Korálky očíslujme v smere hodinových ručičiek so začiatkom pri uzáveri. Dostaneme tak 10 (polohou) rôznych korálok, z ktorých si máme vybrať 4 (modré). A presne to sú kombinácie 4 prvkov z 10, ktorých počet je $\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$. Má to však jeden háčik. V tomto počte sú zahrnuté aj zrkadlovo obrátené náramky (je tam aj náramok MMMBBBBMBB aj náramok BBMBBBBMMM), ktoré sú vskutočnosti rovnaké. Takže počet náramkov budeme musieť deliť dvoma. A tu narazíme na poslednú zákernosť úlohy: sú náramky, ktoré sú zrkadlové samé so sebou (symetrické), a tie sú v počte 210 zahrnuté len raz. (Napr. MBBMB|BMBBM.) Keby sme aj ich počet delili dvoma, bude každý z nich započítaný iba 0,5 krát. Preto teraz zistíme, koľko je symetrických náramkov. Tento počet pripočítame k 210 (takže každý náramok tam bude 2 krát) a výsledok vydelíme dvoma – to bude riešenie tejto časti úlohy. Teraz koľko je symetrických náramkov? Symetrický náramok musí mať z prvých 5 koráliek 2 modré a 3 biele. Podľa toho, ako je rozložených týchto 5 koráliek, je potom už len jedna možnosť ako rozložiť zvyšné. Takže symetrických náramkov je $\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2.1} = 10$. A teda rôznych náramkov s uzáverom je $\frac{210+10}{2} = 110$.

A teraz k druhej časti úlohy:

Každý náramok môžeme otočiť tak, aby začínal modrou a končil bielou korálkou. Môžeme ho „zakódovať" takýmto spôsobom: 3M1B1M5B, čo znamená, že za sebou nasledujú 3 modré, potom 1 biela, 1 modrá a 5 bielych koráliek. (Dokonca písmená M,B sú tam zbytočné, lebo náramok vždy začína modrou a končí bielou korálkou a iné korálky v ňom nie sú. Pre prehľadnosť ich však budem používať aj ďalej).

Ďalej môžem každý náramok otočiť tak, aby prvá skupina modrých koráliek bola najväčšia. Týchto možností nie je veľa a môžeme si ich všetky systematicky vypísať:

4m6b	3m 5b1m1b	2m 4b1m1b1m1b	1m 3b1m1b1m1b1m1b
	3m 4b1m2b	2m 3b1m2b1m1b	1m 2b1m2b1m1b1m1b
	3m 3b1m3b	2m 3b1m1b1m2b	1m 2b1m1b1m2b1m1b
	~~3m 2b1m4b~~	2m 2b1m3b1m1b	
	~~3m 1b1m5b~~	2m 2b1m2b1m2b	tu ľahko nahliadneme, že ďalšie kombinácie by boli opakovaním niektorej z týchto troch.
	2m 5b2m1b	~~2m 2b1m1b1m3b~~	
	2m 4b2m2b	2m 1b1m4b1m1b	
	2m 3b2m3b	~~2m 1b1m3b1m2b~~	
	~~2m 2b2m4b~~	~~2m 1b1m2b1m3b~~	
	~~2m 1b2m5b~~	~~2m 1b1m1b1m4b~~	

Tým, že sme začali modrou a skončili bielou korálkou, a že prvá skupina modrých je najväčšia, sme vylúčili možnosť vypísať ten istý náramok viac krát (otočený). Avšak niektoré náramky sú tam predsa len dva krát. Sú to tie, ktoré sú prečiarknuté. Do páru k nim patria podčiarknuté náramky. Tieto sú zrkadlovo prevrátené. (3412 je rovnaký s 3214, 3511 s 3115, 2521 s 2125, 2422 s 2224, 231211 s 211213, 231112 s 221113 a 221311 s 211312). Ostáva 16 rôznych náramkov bez uzáveru.

Príklad M5: (opravovala Danica)

Toto sú všetky možnosti rozdelenia manéže. Za prvé dve je 1,2b, za akékoľvek ďalšie 1,3b. Za ľubovoľné štyri správne je 5b.

					Č
C					
	Č	M	M		
		M	M		
				C	

					Č
C					
	Č	M	M		
		M	M		
				C	

					C
C					
	C	M	M		
		M	M		
				C	

					C
C					
	C	M	M		
		M	M		
				C	

					Č
C					
	Č	M	M		
		M	M		
				C	

					C
C					
	C	M	M		
		M	M		
				C	

					C
C					
	C	M	M		
		M	M		
				C	

					Č
C					
	Č	M	M		
		M	M		
				C	

					Č
C					
	Č	M	M		
		M	M		
				C	

Príklad M6:(opravovala Lenka Gažová)

Každé 3-ciferné číslo môžeme zapísať ako ABC, kde A, B, C sú jeho cifry. Pre nesymetrické čísla musí platiť: na mieste A môže byť 9 cifier (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), na mieste B všetkých 10 cifier (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a na mieste C len 9 cifier (z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vynecháme tú, ktorá je na mieste A, lebo inak by sme dostali symetrické číslo). Takže všetkých nesymetrických čísiel je *9.10.9=810*.

Príklad M7: (opravovala Alenka Kovárová)

Stačilo si vypísať prvých niekoľko najmenších čísel (205789, 205798, 205879, 205897, 205978, 205987, 207589,...) a potom s nádejou zisťujem, či dávajú po delení 5 zvyšok 2. To prvé najmenšie dáva zvyšok 4, to potom 3, to potom 4 a to potom 2. Huráá. Čiže číslo 205897 je najmenšie číslo vyhovujúce zadaniu, lebo všetky menšie nevyhovujú.

Príklad M8: (opravoval Martin MH Hriňák)

Úloha sa dala najjednoduchšie riešiť tak, že sme si vypísali 9 najmenších a 3 najväčšie štvorciferné čísla deliteľné jedenástimi a vyskúšali podmienky zo zadania. Vyšlo nám potom, že najmenšie vyhovujúce číslo je 1089 a najväčšie je 9977.

Komentár: Úloha bola jednoduchá. Za vyskúšanie vyššie spomenutých možností bolo 5b. Ak ste na nejakú zabudli alebo povedali, že to tak bude aj pre ostatné, som strhával po 0,1b za každý neoverený prípad. Za každú správnu odpoveď bolo po jednom bode. Za skúšku, že spĺňajú podmienky zo zadania, bolo 0,2b , a ak boli overené obidve, tak 0,5b. Za náznak postupu bolo 0,5b. Ak niektorý výsledok chýbal, dalo sa získať maximálne 2,5b.

Príklad M9: (opravoval Ivo Masaryk)

Skúsme najskôr vyriešiť úlohu pre jednu kôpku. Ľahko zistíme, že ak niekto začína ťahať z kôpky na ktorej je 0,5,10,... typu **(5k)** kamienkov, tak prehrá ak ten druhý bude doťahovať znovu do takejto pozície, čo sa vždy dá. Ak však skúmame dve kôpky, zistíme, že ak je na kôpkach rovnaký počet kamienkov, (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4),... typu **(N, N)** kamienkov. tak ten lev, ktorý je na ťahu znova prehrá, lebo ten druhý môže znovu dotiahnuť na túto pozíciu (potiahne z druhej kopy rovnaký počet kamienkov). Pozícia (0,0) je určite prehrávajúca, lebo lev ktorý ťahal pred touto pozíciou potiahol posledný kameň. Ak spojíme tieto postrehy zistíme, že pozícia typu **(N + 0, N + 5k)**, alebo **(N + 5k, N + 0)** kde (N, k) sú ľubovoľné celé nezáporné čísla(0, 1, 2, 3, ...), je tiež prehrávajúca napr. (8, 23) je (8 + 0, 8 + 15) a po ľubovolnom ťahu sa dá dotiahnuť na taký istý typ pozície a (0 + 0, 0 + 5.0) je prehrávajúca. Pozícia je prehrávajúca vtedy, ak rozdiel počtu kamienkov na kôpkach je deliteľný 5, napr.(101, 86) alebo (97, 87). Teda Malý Lev môže vyhrať ak začína, a to tak, že potiahne buď 1 kamienok z menšej, alebo 4 z väčšej kopy a potom doťahuje buď z opačnej kopy rovnako, alebo z tej istej do súčtu 5. Ak začína Veľký Lev (hrá najlepšie ako sa len dá, teda podľa hore uvedenej stratégie) tak aj vyhrá.

Príklad M10: (opravoval Palyno Kováč)

Zoberme si počet mincí, ktorý mali kengury ráno a označme ho x. Teraz si označme štyri časové okamihy : t_v – večer, t_1 – po prvom kradnutí, t_2 – po druhom kradnutí a t_3 – po treťom kradnutí, čiže ráno. Vieme, že v čase t_3 mali všetky tri kengury rovnaký počet mincí, to je x. Poďme teraz počítať odzadu, čiže od času t_3:

	Kengura	**Kengurka**	**Kengurička**
t_3	x	x	x
↓	tu kradla Kengurička po 8 minciach od každej, čiže ak mala v čase t_3 x mincí, tak v čase t_2 mala o tých 16 ukradnutých mincí menej = x - 16. Ďalšie kengury teda mali o 8 mincí viac = x + 8.		
t_2	x + 8	x + 8	x - 16
t_1	x + 8 + 4	x + 8 - 8	x - 16 + 4
t_v	*x + 8 + 4 - 20*	*x + 8 - 8 + 10*	*x - 16 + 4 + 10*

Teraz už vieme, aký majú kengury počet mincí vzhľadom na počet ráno. Treba ale ešte určiť, aký tento počet môže byť. Je zrejmé, že počet mincí ráno musí byť aspoň 16, lebo Kengurička ráno ukradne práve 16 mincí. Ale treba sa ešte presvedčiť, či každá kengura má aspoň toľko mincí, koľko jej ukradnú. Keď si všimnete Kenguričku, tak zistíte, že musí mať aspoň 14 mincí večer, lebo najprv jej Kengura ukradne 10 mincí a hneď na to Kengurka 4 mince. Teraz keď si dosadíme do vzťahu číslo 14 za Kenguričku, vyjde nám x=16 a trojica čísel 8, 26, 14 (Kengura, Kengurka, Kengurička). Keď si prezrieme priebeh takejto noci (8,26,14)→(28,16,4)→(24,24,0)→(16,16,16), tak vidíme, že je všetko v poriadku. Teda môžeme spokojne vyhlásiť, že počet mincí u každej kengury ráno je aspoň 16. (Ďalšie riešenia sú napr. [9, 27, 15] , [10, 28, 16],…).

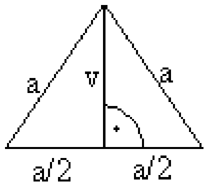
Príklad M11: (opravovala Dáša Horáková)

Vieme, že stôl meral viac ako 120 cm a menej ako 150 cm. Ďalej vieme, že jeho dĺžka (označme si ju d), ale aj dĺžky pera a ceruzky sa dajú vyjadriť v celých centimetroch. Dĺžku stola môžeme vyjadriť aj ako dĺžku 12 pier a teda dĺžka stola d musí byť bezo zvyšku deliteľná 12. Podobne dĺžku stola môžeme vyjadriť aj ako dĺžku 8 ceruziek a teda dĺžka stola d musí byť bezo zvyšku deliteľná aj 8. A teda naša úloha sa zjednodušila na nájdenie čísla medzi číslami 121 a 149, ktoré by bolo súčasne deliteľné 8 aj 12. A to sa dá robiť rôzne. Napr. tak, že nájdeme čísla deliteľné číslom 12 v tomto intervale, to sú čísla 132 a 144 a tie skúsime vydeliť číslom 8. Číslom 8 je deliteľné len číslo 144. Je teda jediným číslom, ktoré je súčasne deliteľné 8 aj 12 a je väčšie ako 120 a menšie ako 150 cm. Stôl meria 144 cm, teda ceruzka meria 144:8=18 cm a pero 144:12=12 cm.

Za správne riešenie bolo 5 bodov, keď vám chýbala nejaká drobnosť v postupe 4,5 bodu, za uvedenie správneho výsledku, ale bez postupu a vysvetlenia, 2 body.

Príklad M12: (opravovala Miša Áčová)

Najprv si uvedomme jednu z vlastností rovnostranných trojuholníkov. Platí, že pomer strany a výšky (ľubovoľnej, keďže sú všetky rovnako dlhé) je vždy rovnaký. Overíme si to nasledovným výpočtom:



Strana v trojuholníku nech má dĺžku a. Potom výška v rozdeľuje stranu a na dve rovnaké časti s dĺžkou a / 2. Veľkosť výšky vypočítame pomocou Pytagorovej vety z pravouhlého trojuholníka s preponami v, a / 2 a odvesnou a: $a^2 = (a / 2)^2 + v^2$

Z tohto vzťahu vyberieme v a postupne upravíme:
$v = \sqrt{}(a^2 - (a / 2)^2) = \sqrt{}(4a^2 / 4 - a^2 / 4) = \sqrt{}(3a^2 / 4) = (\sqrt{}3 / 2) . a$

Takže pomer strany *a* a výšky *v* v rovnostrannom trojuholníku je vždy

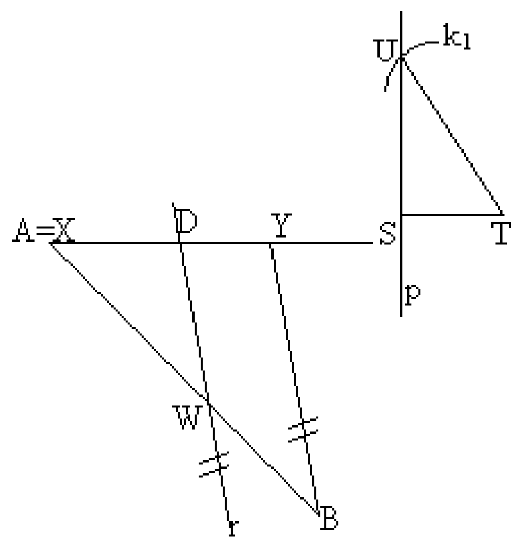
a / (√3 / 2 a) = 1 / (√3 / 2) = 2 / √3, teda a : v = 2 : √3. Zostáva nám teda už len rozdeliť úsečku v pomere 2 : √3 a získame tak stranu a výšku hľadaného trojuholníka. Ako to urobíme? Využijeme podobnosť trojuholníkov. Najprv si musíme narysovať úsečku XY, ktorá bude mať dĺžku 2 + √3 a vyznačíme si na nej bod D, ktorý ju rozdelí v pomere 2 : √3. Najprv Narysujeme polpriamku XD, pričom bod D bude vo vzdialenosti 2 cm od bodu D. Bod Y bude vzdialený od bodu D ešte √3 cm. Ako túto vzdialenosť narysujeme? Využijeme opäť Pytagorovu vetu. $a^2 + b^2 = c^2$ (hľadáme také a, b, c aby jedno z nich malo dĺžku √3 a ostatné boli celé čísla, napríklad:) $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, 1 + 3 = 4

Teda potrebujeme narysovať pravouhlý trojuholník s odvesnou 1 cm a preponou 2 cm, potom druhá odvesna bude mať presne √3 cm(obr. 2).

Keď sme už narysovali túto dĺžku, môžeme ju preniesť na polpriamku XD a vyznačiť bod Y. Teraz príde na rad spomínaná podobnosť. Narysujeme si úsečku AB tak, aby mala danú dĺžku (t.j. 10 cm) a bod X bol zároveň bodom A. Úsečky AB a XY sa teda budú pretínať v bode A a budú zvierať uhol, ktorý nebude 0º ani 180º. Keď vytvoríme úsečku BY, vznikne nám trojuholník ABY. My teraz hľadáme bod W, ktorý rozdelí AB v pomere 2 : √3. Tvrdíme, že tento bod bude ležať na úsečke AB a na priamke, ktorá je rovnobežná s BY a prechádza bodom D (obr. 3). Keď vytvoríme túto priamku, je jasné, že trojuholníky ABY a ADW sú podobné, lebo majú všetky zodpovedajúce uhly zhodné. Platí, že zodpovedajúce strany sú v rovnakom pomere a teda |AW| : |WB| = |XD| : |DY|. Takže posledným krokom je zostrojenie rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky |AW| (obr. 4).

Tu je celý popis konštrukcie:

časť I – pomocný pravouhlý trojuholník
1. ST, |ST| = 1 cm
2. p, p ⊥ ST, S ∈ p
3. k_1, k_1 (T; 2 cm)
4. U, U ∈ p ∩ k_1, |US| = √3



časť II – rozdelenie AB v pomere 2:√3
5. XD, |XD| = 2cm
6. Y, Y ∈ *polpriamka* XD, |DY| = |US| (prenesieme vzdialenosť US z pomocného trojuholníka STU)
7. AB, X≡A, |AB| = 10 cm, 0° < *uhol* BAY < 180°
8. BY
9. r, r || BY, D ∈ r
W, W ∈ AB ∩ r, |AW|:|WB| = |XD|:|DY| = 2:√3

časť III – konštrukcia hľadaného rovnostranného trojuholníka
10. KL, |KL| = |AW| (prenesieme vzdialenosť AW)
11. k_2, k_2 (K, |AW|)
12. k_3, k_3 (L, |AW|)
13. M, M ∈ $k_2 \cap k_3$
Δ KLM