PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Príklad M1:(opravoval Martin MH Hriňák)

Riešenie: Keďže klietky sú očíslované, je dôležité, ktorá myška bude v ktorej. Vyberme najprv tri myšky do prvej klietky. Na to máme 8! / (3! . 5!) = 56 možností, lebo ide o kombinácie tretej triedy z 8 prvkov. Na výber troch myšiek do druhej klietky máme 5! / (3! . 2!) = 10 možností, lebo ide o kombinácie tretej triedy z 5 prvkov (tri myšky sme už ubytovali). No a ostali nám už len dve myšky, ktoré ubytujeme v tretej klietke. Keďže tieto možnosti môžeme medzi sebou kombinovať, dostávame celkovo 560 možností ubytovania.

Hodnotenie: Za výsledok som dával 2 body. Ak ste výsledok zle vyčíslili, mohli ste stratiť 1 bod. Ak bolo riešenie bez postupu, tak ste mohli stratiť až 3 body. Ak ste mali nedostatočne okomentovaný váš postup, mohli ste stratiť do 1,5 bodu.

Príklad M2: podľa Jána Borsíka (opravovala Kaťa Antoničová)

Riešenie: Zo zadania z vety „V prvom rade sedelo vždy päť blšiek." vidíme, že blšiek je aspoň päť, nevieme však koľko presne, preto si ich počet označme n. Rozdeľme blšky do skupín takto: do k-tej skupiny dáme tie blšky, ktoré sa rozprávajú s presne k blškami. Teda k môže byť 0 (blška sa nerozpráva) až n-1 (blška sa rozpráva s každou blškou okrem seba). Teda máme n možností pre k. Ak by sme nechceli, aby boli také dve blšky, čo sa rozprávajú s rovnakým počtom blšiek, museli by sme do každej z n našich skupín zaradiť jednu blšku. Fígeľ je však v tom, že nemôžeme mať naraz skupinu 0 aj n-1, pretože ak sa nejaká blška rozpráva so všetkými, nemôže byť aj blška, ktorá sa nerozpráva s nijakou. Teda máme n blšiek a n-1 skupín, do ktorých blšky zadeľujeme, a teda je jasné, že v niektorej zo skupín budú aspoň dve blšky.

Princíp, ktorý sme pri dôkaze použili, sa nazýva Dirichletov princíp a jeho znenie je nasledovné: ak máme n holubov a iba n-1 klietok, tak aspoň v jednej z klietok budú aspoň dva holuby.

Hodnotenie: Pri hodnotení som postupovala jednoducho, pretože ste buď pochopili, o čom príklad je a máte za to päť bodov, alebo ste príklad nepochopili. Častou chybou bol predpoklad, že blšky sa nemôžu rozprávať „obmiesto", ale sa môžu rozprávať len so susedom. Nič také však v zadaní nebolo. Zbytočne ste skĺzavali aj k úvahám, pri ktorých ste blšky dávali do párov. Mnohí dokonca nepredpokladali, že sa jedna blška môže rozprávať s viac ako jednou blškou. Takže ak ste podstatu príkladu nepochopili, máte poväčšine 0 bodov.

Príklad M3: (opravovala Dáša Horáková)

Riešenie: Príklad nemal riešenie, ako ste si skutočne všetci všimli. Ale keď príklad nemá riešenie, treba to aj dokázať. Označme si rovnice:

1. AB . AA = CDDC
2. BE . AA = GDDG
3. FC . AA = FDDF
4. AB – BE = FC
5. CDDC = GDDG + FDDF

Z 5. rovnice vidíme, že D môže byť jedine 0 (0 + 0 = 0). Je tu možnosť, keby D = 9, ale potom by muselo byť G + F ≥ 10 a číslo CDDC by muselo byť 5-ciferné, čo je zjavne nemožné. Takže D = 0. Číslo CDDC musí byť tvaru C00C.

Z 5. rovnice vidíme, že C ≥ 3, lebo minimálne možné G a F sú 1, 2. Teraz si všimnime 1. rovnicu. Hľadáme číslo A, pre ktoré bude existovať vhodné B, aby súčin AB . AA = COOC. Možnosti sú len dve: 78 . 77 = 6006, 99 . 91 = 9009. Prvá možnosť nevyhovuje, pretože aby platila 4. rovnica, musí byť A > B a to v tomto prípade splnené nie je. Ani druhá možnosť nevyhovuje, pretože v zadaní sa písalo, že rôznym písmenám nemôžme priradiť rovnaké čísla. No a tu by platilo A = C.

Úloha nemá riešenie.

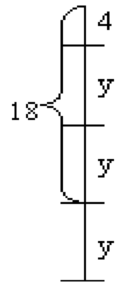
Hodnotenie: Na toto ste mohli prísť jednoduchšími alebo zložitejšími postupmi, ak však boli úplne správne dostali ste 5b. Kto neuvažoval o možnosti D = 9, mal o 0,5 b menej. Kto mal napísané len, že úloha nemá riešenie bez zdôvodnenia prečo, dostal 1b. Kto mal uvedený iba nejaký takmer vyhovujúci príklad mal 1,5b. Za rôzne chýbajúce časti riešenia podľa ich závažnosti som strhávala ďalšie body.

Príklad M4: (opravoval Martin MH Hriňák)

Riešenie: Zo štvrtej vlastnosti máme, že prvé dve cifry nášho čísla budú tvoriť druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla. Teda prvé dve cifry môžu byť 16, 25, 36, 49, 64, 81. Platí $8100=90^2$ a aj $8199 < 91^2$, teda v tomto prípade nedostávame riešenie. Analogicky postupujeme v ostatných prípadoch. Napokon zistíme, že hľadané číslo je 1681 (je zároveň aj jediné).

Hodnotenie: Za výsledok ste mohli získať 2 body. Za postup (hlavnú myšlienku) ste mohli získať maximálne 2 body. Ak ste vypisovali nejaké možnosti a zabudli ste na niektoré, tak ste mohli stratiť 1 bod. Ak to boli riešenia typu vyskúšame všetky možnosti, tak aj viac.

Príklad M5: (opravoval Ivan Masaryk)



Označme si hľadané čísla x , y. Nech platí x > y . Podľa zadania si môžeme zostrojiť dve rovnice.
Rozdiel dvoch čísiel je 18 x - y = 18 odtiaľ x = 18 + y
Podiel väčšieho s menším je 3 zv.4 x : y = 3 zv. 4 x = 3y + 4

Takže 18 + y = 3y + 4 / – y – 4
14 = 2y / : 2
y = 7 teda x = 25

Skúška: Obe čísla sú prirodzené, 25 – 7 = 18 , 25 : 7 = 3 zv. 4

Odpoveď: Našiel som dve prirodzené čísla 25 a 7, ktoré vyhovujú podmienkam v zadaní. Z postupu je zrejmé, že úloha nemá iné riešenie, lebo vyšlo iba 1 riešenie rovníc.

Pozn. Keď riešite príklad, snažte sa napísať taký postup, aby sa dal jeho princíp použiť pri podobných príkladoch. Postupom sa má dôjsť k výsledku a nie naopak. Ak napíšete postup, ktorý funguje iba pre vybraný príklad , môžete niekoho pomýliť, lebo on si môže myslieť, že na váš postup sa dá spoľahnúť.

Príklad M6: (opravoval Palyno Kováč)

1. spôsob:

Vieme, že priamka je určená dvoma bodmi. Preto 9 slamiek sa môže pretínať v toľkých bodoch, pre ktoré platí:

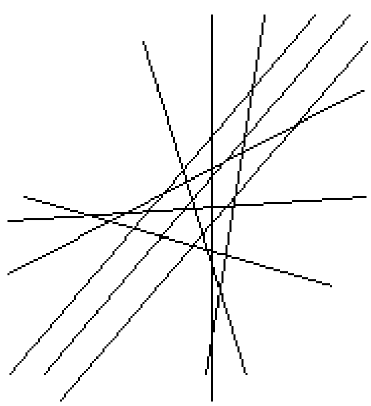
(nezáleži na poradí daných bodov => nezáleží ani na tom, ktoré tri z deviatich slamiek budú rovnobežné) preto vytvárame kombinácie druhej triedy z 9 prvkov.

$C_2(9) = 9! / (2! . (9 – 2)!) = 9 . 8 . 7! / (2 . 7!) = 72 / 2 = 36$ bodov

- od tohto výsledku musíme odčítať tie priamky, ktoré sa nepretnú, lebo sú rovnobežné:

$C_2(3) = 3! / (2! . 1!) = 3 . 2 / 2 = 3$ body

- spolu sa 9 slamiek, z ktorých 3 sú rovnobežné pretne v 36 – 3 bodoch = 33 bodoch



2. *spôsob*:

Môžeme postupovať aj takto: Tieto priamky si postupne rysujeme a to tak, aby preťali všetky dovtedy narysované priamky a nakoniec sčítame všetky priesečníky. Musíme len dávať pozor na to, aby nová priamka nepreťala 2 priamky v 1 bode.

Prvé 3 slamky nech sú rovnobežné.
4. slamka pretne prvé 3 slamky v troch bodoch
5. slamka pretne prvé 4 slamky štyroch bodoch
6. slamka pretne prvých 5 slamiek v piatich bodoch
7. slamka pretne prvých 6 slamiek v šiestich bodoch
8. slamka pretne prvých 7 slamiek v siedmich bodoch
9. slamka pretne prvých 8 slamiek v ôsmich bodoch
Spolu je to 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 bodov.

Príklad M7: (opravovala Alenka Kovárová)

Riešenie: Otočením malého kolieska o 1 zub sa otočí aj stredné koliesko o 1 zub a teda aj veľké koliesko sa otočí o 1 zub (kto toto nenapísal a napriek tomu jednoducho delil 24 : 6, tak som strhávala jeden bod). Aby sme otočili veľké koliesko o 24 zubov (1 hodinu), musíme otočiť malé koliesko štyrikrát (24 : 6 = 4). Teda otočením malého koliesku jedenkrát dookola otočíme veľké koliesko o 6 zubov, teda o štvrť hodiny. No a 1hod 45 min = 7 štvrťhodín, teda malým knieskom musíme otočiť sedemkrát.

Hodnotenie: Za správne riešenie bez zdôvodnenia alebo so zlým zdôvodnením som udeľovala 2 body.

Príklad M8: (opravoval Charon μ - Lukáš Medlen)

Riešenie: Keďže z dvoch líšiek bola "pravá Líštička" práve jedna (a teda neboli to dve rovnaké "falošné Líšky", ani dve rovnaké "pravé Líštičky"), platí, že ak je jedna z nich Líška, potom druhá je Líštička (a naopak). To znamená, že výrok, ktorým odpovedala opýtaná líška, je pravdivý (bez ohľadu na to, kto ho povedal); no a pravdivé výroky tu hovorí len Líštička.

Odpoveď: Líštička je tá líška, ktorej sa divák pýtal.

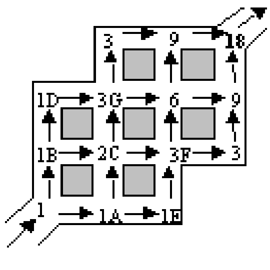
Pozn. Líštička mohla odpovedať akýmkoľvek jasne pravdivým výrokom, aby bolo jasné, že je to ona. (napr. 1 = 1)

Hodnotenie: Paušál +1b., za správnu odpoveď +2b., za správne odôvodnenie +2b., za nedostačujúce odôvodnenie len +1b.; ak bola na papieri napísaná iba nesprávna odpoveď, riešiteľ nedostal ani paušál.

Príklad M9: (opravovala Alenka Kovárová)

*Riešenie:*Je jasné, že Kúzelník musí vytiahnuť aspoň 2 páry = 4 zajace. Označme čierne zajace Č a biele B. Ak vytiahne ČČČČ, ČČBB alebo BBBB (na poradí nezáleží), tak ďalej ťahať už nemusí. Ak vytiahne ČČČB alebo BBBČ, tak ešte nemá 2 požadované páry, musí ťahať ďalej. Piaty vytiahnutý zajac je buď B alebo Č, to sú 4 možnosti: ČBBBB, ČBBBČ, BČČČB alebo BČČČČ. Ako vidno, všetky možnosti vyhovujú. Takže kúzelník musí vytiahnuť minimálne 5 zajacov, aby bolo splnené zadanie.

Hodnotenie: Niektorí z vás nepochopili správne zadanie, tak som im za to patrične strhla body.



Príklad M10: (opravovala Lenka Gažová)

Riešenie: Čísla na križovatkách určujú, koľkými spôsobmi sa na ňu možno dostať. Na križovatky A, B vedie len 1 cesta, ma križovatku C už 2 cesty (jedna cez A a jedna cez B). Na E sa dostaneme len 1 spôsobom (cez A), na križovatku F 3 spôsobmi (dvoma cez C a jedným cez E). Na každú križovatku sa teda možno dostať toľkými spôsobmi, aký je súčet možností na posledných k nej vedúcich križovatkách zdola a zľava.

Príklad M11: (opravovala Miša Áčová)

Riešenie: V tejto úlohe sa pracuje s tromi časovými obdobiami – prítomnosť, minulosť a budúcnosť. Urobme si tabuľku, do ktorej zapíšeme veky obidvoch somárikov v každom období. Najprv, keďže ich ešte nepoznáme, ich označíme písmenkami. Vieme, že 2. somárik je mladší ako 1. a že je v každom období mladší o rovnaký počet rokov, označme ho n. Takže v tabuľke môžeme jeho vek vyjadriť pomocou veku 1. somárika:

	1. somárik	2. somárik
minulosť	x	x - n
prítomnosť	y	y - n
budúcnosť	z	z - n

Ďalej zo zadania vieme, že vek 1. somárika v minulosti je rovnaký ako vek 2. somárika v prítomnosti. Takže za x dosadíme y – n, za x – n musíme dosadiť (y – n) – n = y – 2n. Tieto 2 hodnoty zapíšeme do riadka minulosť. Podobne aj s riadkom budúcnosť – vek 2. somárika sa má rovnať veku 1. somárika v prítomnosti, čiže y. Vek 1. somárika musí byť o n väčší, čiže y + n. Tabuľka teda vyzerá takto:

	1. somárik	2. somárik
minulosť	y – n	y – 2n
prítomnosť	y	y – n
budúcnosť	y + n	y

A teraz využijeme fakty zo zadania príkladu a vytvoríme z nich rovnice. Takže prvá podmienka hovorí o tom, že 1. somárik v prítomnosti je 2-krát starší ako 2. somárik z minulosti, teda:
$y = 2(y – 2n)$
Upravením dostaneme:
$y = 2y – 4n$
$y = 4n$

Druhá podmienka hovorí o tom, že súčet vekov somárikov v budúcnosti bude 63, teda:
$(y + n) + y = 63$

Dosaďme y z predošlej rovnice a vyriešme:
$4n + n + 4n = 63$
$9n = 63$
$n = 7$

Dosadíme do y:
$Y = 4n = 4.7 = 28$

Vek prvého somárika je teda 28 rokov. Druhý somárik má vek y – n = 28 – 7 = 21 rokov.

Hodnotenie: Za správny výsledok ste mohli dostať 1 bod, za uvedený postup riešenia 2 body a za jeho zdôvodnenie ďalšie 2 body.

Príklad M12: (opravoval Jerry Kadubec)

Riešenie: Na nameranie 1dl, 2dl, 3dl, 4dl, 5dl, 6dl môžeme využiť nasledujúci postup. (Tento je asi najkratší.) Všimni si, že po každom preliatí sa jedna z nádob vyprázdni, alebo druhá naplní. Takže žiadne preliatie nie je „od oka“.

Číslo s výkričníkom je namerané množstvo určené pre príslušnú rastlinku. Splnili sme zadanie, **namerali sme presne v daných nádobách 1dl, 2dl, 3dl, 4dl, 5dl a 6dl!**

Hodnotenie: Za nameranie niektorého množstva na 2x, jeden bodík padol za obeť. Za používanie pomôcok (ceruzka, „od oka“, ...) padali bodíky podľa toho, nakoľko si si pomohol. A za vyriešenie značne inej úlohy ani bodík nekvapol.

krok	50dl	12dl	5dl	krok	50dl	12dl	5dl	krok	50dl	12dl	5dl
1	21	0	0	10	0	12	5	19	3	7	5
2	16	0	5	11	5	12	0	20	8	7	0
3	16	5	0	12	5	7	5	21	8	2	5
4	11	5	5	13	10	7	0	22	13	2	0
5	11	10	0	14	10	**!2**	5	23	13	0	2
6	6	10	5	15	10	0	5	24	1	12	2
7	6	12	**!3**	16	0	10	5	25	1	9	5
8	6	12	0	17	0	12	3	26	6	9	0
9	**!1**	12	5	18	3	12	0	27	**!6**	**!4**	**!5**
								28	0	0	0