PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Príklad M1 opravoval Martin MH Hriňák

Všimnime si, že keď zhasneme 6 lámp a 7 zasvietime, svieti nám o jednu lampu viac (1). Ak zhasneme 7 lámp a zasvietime 6, svieti nám o jednu menej (2). Majme na začiatku zasvietených n lámp. Ak je 104>n>13, tak postupne pomocou (2) zhasneme toľko lámp, aby sme sa dostali s počtom zasvietených lámp na najbližší nižší násobok 13. No a potom zhasíname po 13 lampách. Ak je n < 13 (prípad n=13 je jasný), tak zasvietime 13 lámp a postupujeme ako v prípade 104>n>13. Ak je n > 103, tak zhasneme 13 lámp, a postupujeme ako v prípade 104>n>13. Teda vieme zhasnúť všetky lampy. Analogicky s využitím (2) vieme zasvietiť všetky lampy – vtedy sa snažíme dostať počet zhasnutých lámp na násobok 13.

Komentár: Viacerí z vás zle pochopili zadanie. Niektorí zase dokazovali, že sa dajú zhasnúť a vypnúť všetky lampy, ak ich svieti na začiatku 27, resp. 0 alebo 111. Za to bolo 0,5 bodu. Ďalej ste mohli stratiť 0,5 bodu za to, že ste nedávali pozor na to, či máte toľko zasvietených, resp. zhasnutých lámp, koľko ich zhasínate, resp. zapínate. No a mohli ste prísť o ďalšie body, keď ste skonštatovali, že „nejako to vyjde“ alebo keď ste zabudli rozobrať niektoré prípady.

Príklad M2 opravovala Maja Hanulová

Nebudeme skromní a začneme hneď rokmi. Budeme sa snažiť nájsť čo najviac rokov idúcich za sebou, v ktorých sa opakujú číslice. Budeme sa zoberať len štvorcifernými dátumami, pretože čím viac číslic, tým je väčšia šanca, že sa budú opakovať. Číslica na mieste jednotiek sa mení každý rok, na mieste desiatok každých desať rokov, na meste stoviek každých sto rokov, na mieste tisícok každých tisíc rokov.

Teda v rokoch tvaru AxxA, xAxA, xxAA (napr. 1451, 4525, 8533) získa kúzelník jednoročné prázdniny (potom sa zmení číslica na mieste jednotiek). Podobne v rokoch tvaru AxAx, xAAx (napr. 4240 - 4249) získa desaťročné prázdniny, v rokoch tvaru AAxx (napr. 3300 - 3399) storočné. Tisícročné nebude mať pri štvorciferných rokoch nikdy.

Teraz sa lepšie pozrieme na storočné prázdniny. Trvajú vždy od roku AA00 do roku AA99,

A = 1..9.Pokúsime sa ich natiahnuť ešte trochu ďalej, teda budeme hľadať najvzdialenejší rok smerom dole aj hore v ktorom sa ešte opakujú číslice. Dopracujeme sa k týmto výsledkom:

prázdniny od roku ...do roku ...	koľko je to rokov
1099 - 1202	104
2199 - 2300	102
3299 - 3400	102
4399 - 4500	102
5499 - 5600	102
6599 - 6700	102
7699 - 7800	102
8797 - 8900	104
9877 - 9999	123

Bezkonkurenčne najviac prázdnin získame v rokoch 9877 až 9999. Skúsme sa pohnúť ešte kúsok nižšie (vyššie sa už nedá - uvažujeme len roky 1 - 9999). 31.12. 9876 vyhovuje, 30.12. 9876 sú už všetky číslice rôzne, teda koniec prázdnin (vlastne začiatok).

Toto sú najdlhšie prázdniny, aké kúzelník môže mať. Trvajú 123 rokov a 1 deň, to je 44923 dní.

Bodovanie: Za nájdenie najdlhších prázdnin 5b, za niektoré zo 104-ročných + nejaké drobné 4b, za 102-ročné +nejaké drobné 3b. Za numerické chyby -0.1b, za nepresný alebo žiadny postup do -2b.

Poznámka k priestupným rokom: priestupný rok je každý rok deliteľný 4, ak nie je deliteľný 100. Roky deliteľné 400 sú priestupné. Za priestupné roky som body nestrhávala.

Príklad M3 opravoval Martin MH Hriňák

Označme si počet párov králikov v n – tom mesiaci ako an . Potom ľahko nahliadneme, že platí an+1 = an + an-1 pre n > 1, pričom a1 = 2, a2 = 3. Tento vzťah platí preto, lebo v (n+1)-vom mesiaci máme všetky tie páry, ktoré boli aj v n–tom mesiaci, no a pribudlo nám ešte toľko králikov, koľko ich bolo v (n – 1)-vom mesiaci – to sú tie, ktoré už dospeli a môžu mať potomstvo. Postupným vypočítavaním jednotlivých členov zistíme, že a24 = 121 393 . Ale zarátali sme tam aj ten náš prvý dospelý pár. To znamená, že potom tento pár mal 121 392 párov potomkov.

Všeobecne platí, že v n-tom mesiaci máme

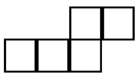
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

párov králikov.

Komentár: Najčastejšie ste body strácali za to, že ste si zle prečítali zadanie alebo ste ho zle pochopili. Ďalej často sa vám stávalo, že ste sa niekde vo výpočte pomýlili. Za to ste mohli stratiť maximálne 1 bod. Ešte častou chybou bolo, že ste do výsledku zarátali aj pôvodný pár (– 0,5 bodu).

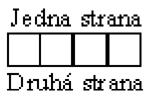
Príklad M4 opravoval Andrej Šramko

V sieti kocky je 6 štvorcov, pretože kocka má 6 stien. V sieti kocky musia byť aspoň štyri štvorce v jednom smere.

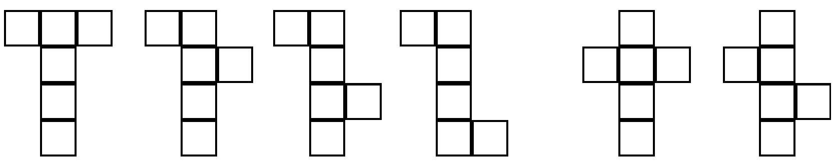
napr. 

Ak sú štyri štvorce za sebou, tak zvyšné dva štvorce musia byť rozmiestnené tak, aby bol jeden a jednej strane a druhý na druhej.

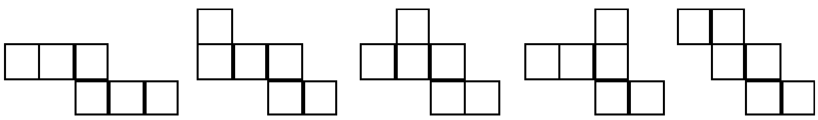
Ináč by kocka nevznikla.



Nesmieme zabúdať ani na to, že kartón je z obidvoch strán rovnaký, čiže ak akúkoľvek sieť hociako (aj zrkadlovo) otočíme, je to stále to isté riešenie. Tu sú riešenia sietí kocky, kde nasledujú štyri štvorce priamo za sebou:



Ak za sebou nie sú štyri štvorce, tak existujú tieto riešenia:



Existuje teda 11 riešení. Príklad bol bodovaný nasledovne: Za každé správne riešenie dostal riešiteľ 0,5 b. Pričom sa prvé riešenie nepočítalo. Čiže: 2 rieš. = 0,5b; 3 rieš. = 1b; 4 rieš. = 2b; 11 rieš. = 5b. Keď sa niektoré riešenie opakovalo a riešiteľ ho zarátal medzi riešenia, tak bol strhnutý jeden bod (celkovo).

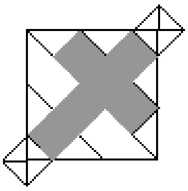
Príklad M5 opravoval Jerry Kadubec

Na začiatku si treba uvedomiť, že sieť kocky musí mať „za sebou" 4 štvorčeky (otáčanie kocky v jednom smere). Takže jedno riešenie je také, že sieť kocky dáme na kartón rovno (pravé uhly vzhľadom na strany kartónu). Takto nám teda najväčšia kocka vyjde 40cm : 4 = 10cm. Ale ešte by sme mohli dať sieť kocky na kartón „šikmo" (využijeme to, že uhlopriečka vo štvorci je dlhšia ako strana štvorca).

Dĺžku uhlopriečky vypočítame z Pytagorovej vety: $40^2 + 40^2 = u^2$ z čoho u = Ö2 . 40

Z obrázka vidno, že trojuholníčky, na začiatku a konci uhlopriečky majú súčet výšok taký veľký, ako štvorček siete kocky. Takže na uhlopriečke je 5 takých dĺžok.

Riešenie je teda Ö2 . 40 : 5 = Ö2 . 8.



Bodovanie: Ak niekto vôbec neuvažoval o tom, žeby sa dala sieť dať uhlopriečne, dostal 1 bodík. Ak niekto nevedel, čo je sieť a delil strany kocky, tak podľa uľahčenia mal medzi 2-3 bodíkmi. Ak niekto nespočítal presne príklad, ale len dĺžku strany „odhadol“, ale inak mal všetko dobre dostal 4 bodíky. A keď máš všetko dobre 5 bodíkov máš.

Príklad M6 opravovala Táňa Viszusová

Pri ružovej krabici ide vlastne o súčin dvesto jedenástok (11 . 11 . ... . 11 . 11), pri fialovej krabici o súčin tristo pätiek (5 . 5 . ... . 5 . 5). Na to, aby sme mohli porovnať tieto súčiny by nám pomohlo, keby sme v oboch mali rovnaký počet činiteľov. Spoločný deliteľ 200 a 300 je napr. 100.

Fialová krabica:	5 . 5 . 5. ... . 5 . 5 . 5	= (5 . 5 . 5) . (5 . 5 . 5) . (5 . 5 . 5) . ... . (5 . 5 . 5)
	tristo pätiek	100 – krát (5 . 5 . 5)
Ružová krabica:	11 . 11 . ... . 11 . 11	= (11 . 11) . (11 . 11) . (11 . 11) . ... . (11 . 11)
	dvesto jedenástok	100 – krát (11 . 11)

Keďže počet činiteľov je rovnaký v oboch súčinoch a každý z týchto súčinov obsahuje rovnaké čísla, stačí nám porovnať 11 . 11 = 121 a 5 . 5 . 5 = 125. Vieme, že 125 > 121, tada viac cukru je vo fialovej krabici.

Bodovanie: 5b - správne riešenie, –1b až –2b - neúplné alebo žiadne zdôvodnenie niektorých krokov, –3b - dobrá myšlienku bez zdôvodnenia alebo väčšie „diery“ v logike, –4b - matná predstava, –5b - 200 . 11 alebo 300 . 5, alebo len odpoveď.

Príklad M7 opravovala Kaťa Antoničová

Začnime od podmienky „Ovečka tancuje o štyri miesta pred somárikom“. Naznačme si teda, ako vyzerá rad zvieratiek: O _ _ _ S, pričom pred Ovečkou alebo za Somárikom bude ešte jedno miesto. Z uvedenej podmienky vieme, že Ovečka môže byť buď na prvom, alebo na druhom mieste v rade. Keby chcela byť na treťom mieste, nemal by už kde tancovať Somárik. Vyskúšajme najprv prípad, keď Ovečka tancuje na prvom mieste. Somárik teda na piatom. Ak má Lámä tancovať o tri miesta za Poníkom, môže byť iba na štvrtom, piatom alebo šiestom mieste. Na piatom už tancuje Somárik a na štvrtom mieste tiež tancovať nemôže, pretože Poník by musel tancovať na mieste, kde už je Ovečka. Teda Lámä bude tancovať na šiestom mieste a Poník na treťom. Keďže podľa podmienky Ťávä netancuje pred poníkom, musí tancovať za ním, preto tancuje na štvrtom mieste. Koník musí teda tancovať na druhom mieste. Tu je teda výsledné poradie: O K P Ť S L. Splnené sú všetky podmienky.

Podobne by sme postupovali, ak by sme Ovečku nechali tancovať na druhom mieste a výsledné poradie by bolo P O K L Ť S. Úloha má teda dve riešenia.

Bodovanie: Za každý z výsledkov po jednom bode, za celý postup tri body. Za uvedenie iba jedného riešenia a postupu jeho nájdenia 2,5 bodu. Za chyby v postupe sa strhával individuálny počet bodov v závislosti od závažnosti chyby.

Príklad M8 opravovala Lenka Gažová

To, že na otvorenie trezoru musia byť aspoň traja znamená, že žiadna dvojica psov nemôže odomknúť trezor bez tretieho psa. Počet všetkých dvojíc psov je

6 . 5 / 2 = C(2,6) = 15. A to je aj najmenší počet zámkov. Aké kľúče bude mať ktorý pes? Každá trojica psov musí odomknúť trezor ? od každého zámku musia mať kľúč 4 psy (ak by ho mali traja, dvaja, jeden, žiaden pes – nájdeme trojicu, ktorá je bez kľúča, ak by ho mali piati, šiesti – nájdeme dvojicu, ktorá trezor sama otvorí) ? spolu je 15 . 4 = 60 kľúčov, psov je šesť, teda každý má 60 : 6 = 10 kľúčov. (kľúče označíme číslami 1, 2, . . . a psov písmenami A, B, . . .)

A	—	—	—	—	—	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	—	2	3	4	5	—	—	—	—	10	11	12	13	14	15
C	1	—	3	4	5	—	7	8	9	—	—	—	13	14	15

D	1	2	—	4	5	6	—	8	9	—	11	12	—	—	15
E	1	2	3	—	5	6	7	—	9	10	—	12	—	14	—
F	1	2	3	4	—	6	7	8	—	10	11	—	13	—	—

Bodovanie: 1,5 b – štyria psy majú kľúč od rovnakého zámku + zdôvodnenie
2 b – koľko je zámkov + zdôvodnenie
1,5 b – ako majú psy rozdelené kľúče (1,5 b + 2 b + 1,5 b = 5 b)

Príklad M9 opravoval Peťo Halák

Zo zadania vieme, že všetky mačky tancovali naraz v sobotu. Od soboty si spätne znázorníme do tabuľky, kedy ktoré mačky tancovali.

1Po	1Ut	1Str	1Štv	1Pi	1So	1Ne	2Po	2Ut	2Str	2Štv	2Pi	2So
	m	M	m	M	m	M		M		M		M
P !			P			P			P			P
			s	S				S				S

M,m – najmladšie mačky; p,P – prostredné mačky; s,S – najstaršie mačky

Vidíme, že na prostredné mačky by vyšlo vystúpenie na pondelok (1). To ale nemohli, preto nemusíme v rozpise tancov pokračovať do minulosti. Takže porada bola niekedy medzi pondelkom (1) a sobotou (2). Tým máme ohraničené obdobie, v ktorom treba hľadať vhodné dni na poradu. Prvý týždeň si označíme 1 a druhý týždeň 2. Najstaršie mačky tancovali pred sobotou (2) v utorok (2). Pred utorkom (2) mohli tancovať v piatok (1), ale rovnako aj vo štvrtok (1). Dôvod je jednoduchý: ak by tancovali vo štvrtok (1), tak potom mal ich ďalší tanec nasledovať v pondelok (2), ten sa ale presunul na utorok (2). Podobne mohlo tancovanie najmladších mačiek prebiehať dvomi spôsobmi počas predchádzajúceho týždňa. Jeden spôsob je v tabuľke veľkými písmenami, druhý malými.

Teraz už zostáva len určiť, ktorý deň bola porada. To závisí od toho, ako si stanovíme počítanie dní od porady. Ak bola porada v nultý deň, tak mohla byť v pondelok a štvrtok. Ak bola v prvý deň, tak mohla byť v utorok a v piatok. Ak v deň porady začali vystupovať najmladšie, na druhý deň prostredné a na tretí deň najstaršie, tak mohla byť porada v stredu a v sobotu. Ak v deň porady vystúpili všetky mačky a potom sa začalo rátať, tak mohla byť vo štvrtok a v sobotu (t.j. riaditeľ sa prišiel pozrieť hneď v ten večer, kedy bola porada). Ak sa dni začali počítať tak, že porada bola nultý deň a prvý deň vystúpili všetky mačky, tak mohla byť v stredu a piatok. Pri riešení stačilo uviesť jednu z týchto možností, ale kompletne (t.j. nestačilo, že bola v pondelok, potom bolo treba uviesť aj štvrtok).

Úloha sa dala riešiť aj tak, že sa vyskúšali všetky dni, v takom prípade bolo treba ukázať, že spoločné vystúpenie v sobotu nemôže nastať nikdy v budúcnosti ani ak sa začne tancovať v iné dni. To sa dalo ukázať tak, že prostredné mačky tancovali od istého času vždy len v utorok a piatok, takže sa nemohli stretnúť všetky mačky v sobotu.

Bodovanie: Riešenie za 5 bodov muselo obsahovať aspoň náznak dôkazu toho, že porada nemôže byť v žiadny iný deň pri dodržaní predpokladov s akými sa pri riešení uvažovalo. Za neohraničenie obdobia, kedy mohla byť porada sa strhávalo 0,2-0,3 b., za nezistenie jedného z dvoch riešení 0,5-1 b. Ak sa pri spätnom určovaní dní, kedy mačky vystupovali zabudlo na posun pondelok-utorok strhli sa 2 b. Riešenia, ktoré nemali jasný postup, alebo mali vážnejšie nedostatky boli ohodnotené 1,5-2,5 bodmi. Pri riešeniach, ktoré pondelky úplne vyškrtli z kalendára sa dávali 2-2,5 bodov podľa úplnosti.

Príklad M10 opravoval Charon - Lukáš Medlén

Existuje veľa riešení a veľa spôsobov, ako na ne prísť. Podstatou každého postupu bola však určite metóda pokusu a omylu.

Niektoré z riešení, ktoré ste napísali:

najčastejšie sa vyskytovalo toto: 9.8.7.4 - (6+5+3+2):1=2000

iné:

(1+9).(3+7).(8-6).4.5:2=2000
1987+65:(2.4-3)=2000
(67+8+5).(92:4+3-1)=2000

bodovanie:

- paušál: 1b
- správne riešenie 5b
- riešenie bez napísaného výsledku: 4b

chyby:

Podstatou väčšiny problémov bolo (ako obvykle) neprečítanie si zadania, a potom neznalosť počtov (priority znamienok).

Príklad M11 opravovala Táňa Fislová

Vieme, že ABBABBABBA je číslo, teda A môže byť 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (číslo nezačína 0), a B 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vieme, že A 1 B. Zostavíme si rovnicu a riešime ju:

4A + 6B = 64 / : 2	B = 2 ? A = 13	nevyhovuje
2A + 3B = 32 / – 3B	B = 4 ? A = 10	nevyhovuje
2A = 32 – 3B / : 2	B = 6 ? A = 7	vyhovuje
A = 16 – 1,5 B	B = 8 ? A = 4	vyhovuje

Ak A je celé číslo, potom B musí byť párne, teda 2, 4, 6 alebo 8.

Blší cirkus má 7667667667 alebo 4884884884 členov.

Bodovanie: 1b – za jedno správne riešenie
3b – postup: 1b – ak ste za A skúšali 1, . . , 9 a aj za B 1, . . , 9
2b – ak ste za A skúšali 1, . . , 9 a B dopočítali
3b – ak ste skúšali len za B 2, 4, 6, 8 a A ste dopočítali
- 0,5 ak ste za správny výsledok považovali aj A=10, B=4

Príklad M12 opravovala Alenka Kovárová

1. Číslo (samozrejme prirodzené) je tým väčšie, čím má viac číslic = cifier. Takže ak chceme, aby nám zostalo čo najväčšie číslo, tak musíme logicky vyškrtať čo najmenej číslic. Ak majú mať vyškrtnuté číslice súčet 20 a má ich byť čo najmenej, tak musia byť 3 (2 nestačia, lebo to by bolo maximálne 9+9=18).

2. Ak majú čísla rovnaký počet číslic, tak väčšie je to, ktoré má väčšiu číslicu na prvom líšiacom sa mieste zľava. Poďme škrtať najskôr jednu číslicu. Je jasné, že ak škrtneme prvú jednotku, tak číslo bude začínať 23456..., ale potom by sa nám asi ťažko vytvoril súčet 20 z troch číslic. Takže ak by sme škrtli 2, tak by sme dostali 1345678... Je zrejmé, že väčšie číslo už nedostaneme, lebo keby sme škrtli akúkoľvek inú číslicu, naše číslo by začínalo 12..., teda by bolo menšie. Do súčtu 20 nám teda ešte chýba 18, čo môžu byť iba 2 deviatky. Po malej úvahe (alebo keď si to vyskúšate) prídete na to, že najvhodnejšie je ich škrtnúť na konci, takže výsledné číslo bude

134567891011121314151617181920212222324252627282303132333435363738340.

Veľa z vás si neuvedomilo 1., tí dostali nanajvýš tak 1 bod. Tí, čo si poplietli číslice a čísla (čo rozhodne nie sú synonymá) dostali najviac tak 2 body. Správne pochopené riešenia boli bodované tradične, za správne riešenie 2 body a za odôvodnenie príslušne viac.