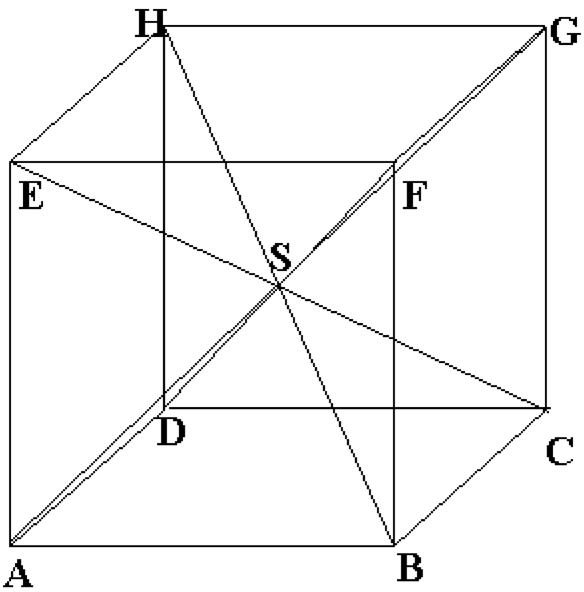
PIKOMAT
16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 1. série letnej časti

Príklad 1:



Kocku musíme rozdeliť na 6 rovnakých štvorbokých ihlanov. Štvorboký ihlan je ihlan, ktorého podstava je štvoruholník. Kedy sú ihlany rovnaké? Keď ich podstavy sú rovnaké a ich bočné steny sú rovnaké (zhodné) trojuholníky. Kocka má 6 štvorcový stien so stranou a. Keďže máme kocku rozdeliť na 6 štvorbokých ihlanov, práve steny kocky môžu byť ich podstavami. Máme teda 6 zhodných štvorcov ako podstavy ihlanov. Potrebujeme ešte nájsť ich vrcholy. Mnohí z Vás si všimli, že telesové uhlopriečky sa pretínajú v jednom bode → bod **S**, a práve tento by mohol byť vrcholom všetkých ihlanov. Treba ešte ukázať, že bočné steny ihlanov sú rovnako dlhé, teda ihlany sú naozaj zhodné. Máme 6 ihlanov: **ABCDS, ABEFS, BCFGS, CDGHS, ADHES, EFGHS**. Ich bočné steny sú **AS, BS, CS, DS, ES, FS, GS, HS**. Uhlopriečky v obdĺžniku sú rovnako dlhé a rozpoľujú sa. Keď si všimneme obdĺžniky **ACGE** a **BDHF**, zistíme, že sú rovnaké (lebo ich steny sú : stena kocky = a, uhlopriečka štvorca = u). Teda aj ich uhlopriečky budú rovnako dlhé: |**AG**| = | **EC**| = |**DF**| = | **BH**|. Uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú, teda bod **S** je priesečníkom týchto uhlopriečok, z čoho už |**AS**| = |**SG**| = |**ES**| = |**CS**| = |**BS**| = |**HS**| = |**DS**| = |**FS**|. Všetky bočné hrany ihlanov sú rovnako dlhé, podstavami sú steny kocky, teda ihlany sú zhodné.

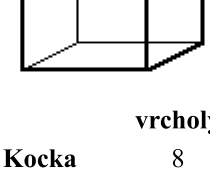
Príklad 2:

Na správne riešenie sa dalo prísť viacerými spôsobmi. Asi najjednoduchší z nich je cez jednoduchšiu úlohu–rozdeliť kocku na 3 zhodné štvorboké ihlany, ktoré potom rozdelíme na 2 zhodné trojboké ihlany. Pre objem kocky platí: $\mathbf{V = a^3}$. Pre objem ihlanov štvorbokých: $\mathbf{V = a^3/3}$, z čoho dostaneme $\mathbf{a^3 = S_p v}$. Jednou z možností je ihlan s podstavou štvorca $\mathbf{S_p = a^2}$ (stena kocky) a výškou $\mathbf{v = a}$. Keď máme kocku **ABCDEFGH**, jedno z možných rozdelení je na 3 ihlany so spoločným vrcholom v bode **H**: **ABCDH, ABEFH, BCFGH**. Že sú naozaj zhodné sa presvedčíme porovnaním stien ihlanov: 4 trojuholníkové bočné steny s dĺžkami strán : 1.) a,a,u 2.) a,a,u 3.) a,u,t 4.) a,u,t (u-stenová uhlopriečka u = √2.a, t-telesová uhlopriečka, t = a.√3 - z Pytagorovej vety). Porovnaním zistíme, že naše ihlany sú naozaj zhodné. Teraz už len potrebujeme rozdeliť takýto ihlan, napr. ihlan **AEFBH** na 2 zhodné trojboké ihlany . Keď si tento ihlan pozrieme, zistíme, že je zrkadlovo súmerný podľa roviny **BEH**. Touto rovinou prevedieme rez a získame ihlany **AEBH** a **BEFH**. Opäť ešte overíme porovnaním stien, že sú ihlany naozaj zhodné: 4-trojuholníkové steny (aj s podstavou) → 1.) a,a,u 2.) a,u,t 3.) a,u,t 4.) a,a,u. Podobne rozdelíme aj ostatné štvorboké ihlany, čím sme získali 6 trojbokých ihlanov: **AEBH, BEFH, BFGH, BCGH, ACDH, ABCH**.

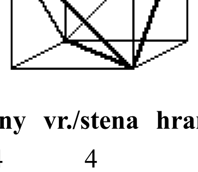
Príklad 3:

V tomto príklade ste mali nakresliť kocku, pravidelný štvorsten a pravidelný osemsten a odpovedať na 7 uvedených otázok:

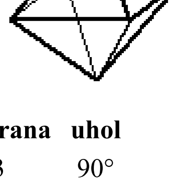
Kocka,



Štvorsten,



Osemsten



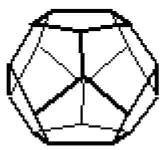
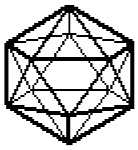
	vrcholy	hrany	steny	vr./stena	hrana/vr.	vr./hrana	uhol
Kocka	8	12	4	4	3	3	90°

	vrcholy	hrany	steny	vr./stena	hrana/vr.	vr./hrana	uhol
Štvorsten	4	6	6	3	3	3	60°
Osemsten	6	12	8	3	4	4	60°

Príklad 4:

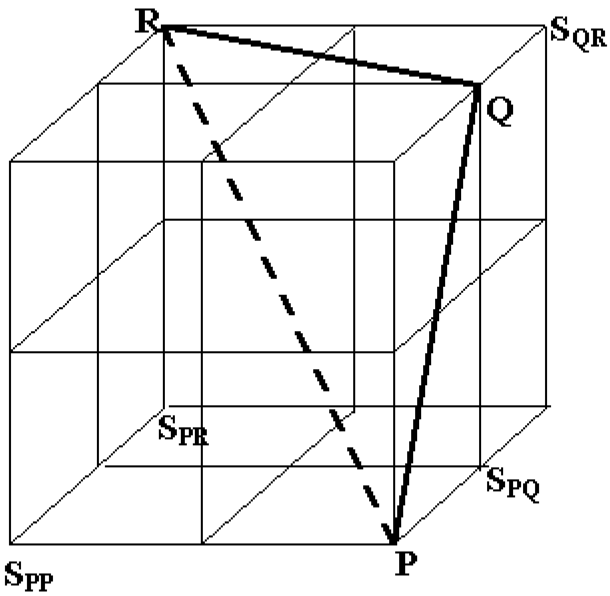
Ďalšie pravidelné telesá okrem kocky, pravidelného štvorstena a osemstena sú dvanásťsten a dvadsaťsten. Stačilo uviesť jeden z nich:

Dvanásťsten, *Dvadsaťsten*

	vrcholy	hrany	steny	vr./stena	hrana/vr.	vr./hrana	uhol
Dvanásťsten	20	30	12	5	3	3	108°
Dvadsaťsten	12	30	20	3	5	5	60°

Príklad 5:



Všimnime si, že všetky priemety P, Q, R ležia v kocke 2x2x2, ktorá leží vo vnútri našej kocky 4x4x4. Z priemetov určíme umiestnenie bodov P, Q, R v kocke 2x2x2.

1. 1. Body P, Q ležia na jednej stene a vytvárajú s bodom S_{PQ} pravouhlý trojuholník.
   $|PS_{PQ}| = 2$, $|S_{PQ}Q| = 4$, $|PQ| = ?$, kde PQ je prepona.
   $|PS_{PQ}|^2 + |S_{PQ}Q|^2 = |PQ|^2$
   $2^2 + 4^2 = |PQ|^2$
   $20 = |PQ|^2$
   $\sqrt{20} = |PQ|$
2. $|QS_{QR}| = 2$, $|S_{QR}R| = 4$, $|QR| = ?$, kde QR je prepona.
   Toto je veľmi podobný prípad k už vyriešenému, teda $|QR| = \sqrt{20}$.
3. Dĺžka úsečky |PR| je telesovou uhlopriečkou. Na vypočítanie tejto úsečky budeme musieť vypočítať 2 Pytagorove vety. Najskôr si vypočítame stenovú uhlopriečku $|PS_{PR}|$. Na to budeme potrebovať ďalší pomocný bod S_{PP}.

$|PS_{PP}| = 4$, $|S_{PP}S_{PR}| = 4$, $|PS_{PR}| = ?$, kde PS_{PR} je prepona.

$|PS_{PP}|^2 + |S_{PQ}S_{PR}|^2 = |PS_{PR}|^2$

$4^2 + 4^2 = |PS_{PR}|^2$

$32 = |PS_{PR}|^2$

$\sqrt{32} = |PS_{PR}|$

Keď poznáme dĺžku úsečky $|PS_{PR}|$, dĺžka úsečky $|S_{PR}R|$ je 4, potom je úsečka |PR| preponou v pravouhlom trojuholníku PRS_{PR}.

$|PS_{PR}| = \sqrt{32}$, $|S_{PR}R| = 4$, $|PR| = ?$, kde PS_{PR} je prepona. $|PS_{PR}|^2 + |S_{PR}R|^2 = |PR|^2$

$(\sqrt{32})^2 + 4^2 = |PR|^2$

$48 = |PR|^2$

$\sqrt{48} = |PR|$

Riešenie: $|PQ| = |QR| = \sqrt{20}$, $|PR| = \sqrt{48}$

Príklad 6:

Nech vzdialenosť medzi stromami je **a** a očíslujeme si stromy 1 až 10, po obrovskom počte skúšaní sa môžete presvedčiť, že cesta **6-1-10-2-9-3-8-4-7-5** je najdlhšia a jej dĺžka sa rovná **49a**. V tomto príklade išlo o to, že sa vzdialenosť mala začať rátať od prvého poliateho stromu.

Príklad 7:

Existuje 21 možných dvojíc (bez ohľadu na to, čo je na ktorej kocke). Aby padla aspoň jedna dvojica 3-krát, treba hodiť kockami 43-krát. Prvých 42-krát môže padnúť každá dvojica 2-krát. 43 hod tvorí jedna z už padnutých dvojíc a tá tam bude tretí krát.

súčet						
2	11					
3	12					
4	13	22				
5	14	23				
6	15	24	33			
7	16	25	34			
8		26	35	44		
9			36	45		
10				46	55	
11					56	
12						66

Najmenší možný súčet, ktorý padne pri hode 2 kociek, je 2 (1 + 1) a najväčší 12 (6 + 6). Spolu je to 11 rôznych súčtov. Ak chceme mať zaručené, že padne 2-krát ten istý súčet, musíme hádzať 12-krát. Prvých jedenásť súčtov totiž môže byť rôznych (máme 11 rôznych súčtov). Dvanásty musí byť jedným z tých, čo padli doteraz.

Príklad 8:

Existuje 21 možných dvojíc (bez ohľadu na to, čo je na ktorej kocke). Aby padla aspoň jedna dvojica 3-krát, treba hodiť kockami 43-krát. Prvých 42-krát môže padnúť každá dvojica 2-krát. 43 hod tvorí jedna z už padnutých dvojíc a tá tam bude tretí krát.

Príklad 9:

Kamienky si označíme A,B,C,D. Výsledok váženia budeme označovať napríklad C > D, čo znamená, že kamienok C je ťažší ako kamienok D. Kamienky budeme postupne zoraďovať od najľahšieho po najťažší, zľava doprava.

1. váženie: Zoberieme si ľubovoľné dva z nich. Napríklad A a B. Zistíme, ktorý z nich je ťažší. Nech A > B. Takto sme zoradili dva kamienky v poradí B,A.
2. a 3. váženie: Zoberieme tretí kamienok, napríklad C. K tomu, aby sme vedeli určiť, kam patrí, musíme ho porovnať aj s kamienkom A aj s kamienkom B (to sú dve váženia). Napríklad zistíme, že C > B a C < A. To znamená, že poradie kamienkov bude B,C,A.
4. váženie: Zostal nám štvrtý kamienok D. Ten odvážime najprv so stredne ťažkým kamienkom z doterajších troch. V našom prípade to bude C. Ak zistíme, že D < C, tak nám už bude stačiť len jedno.
5. váženie: kamienka D s kamienkom B, aby sme zistili, či kamienok D patrí pred kamienok B, alebo medzi kamienok B a C. Ak bude D < B, tak budeme mať kamienky v poradí D,B,C,A. Ak D > B, tak budú v poradí B,D,C,A. Ak by sme pri 4. vážení zistili, že D>C, tak budeme pri piatom vážení porovnávať kamienok D s kamienkom A namiesto kamienka B. Tým zistíme, či budú kamienky v poradí B,C,D,A (ak D < A), alebo B,C,A,D (ak D > A). Takýmto postupom budeme vedieť vždy **s istotou na 5 vážení** určiť presné poradie 4 kamienkov. Ak by sme mali šťastie, tak sa nám podarí hneď odhadnúť poradie kamienkov (napríklad podľa veľkosti) a potom si toto poradie stačí overiť 3 váženiami. Po vážení kamienkov A a B zistíme, že kamienok A<B. Potom budeme vážiť kamienok B s kamienkom C a zistíme, že B<C. Na tretie váženie zistíme, že C<D. Najmenej vážení teda musíme urobiť 3. K tomu by sme potrebovali mať šťastie. S istotou budeme vedieť určiť poradie kamienkov na 5 vážení.

Príklad 10:

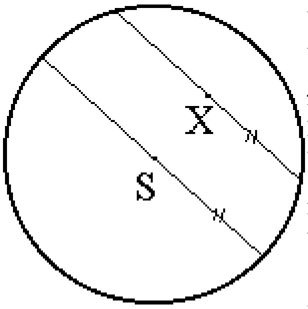
Kamienky si označíme A,B,C,D,E,F,G,H. Prvé štyri kamienky si zoradíme podľa postupu v príklade 9 na **5 vážení**. K tomuto radu budeme postupne pridávať ďalšie kamienky. Nový kamienok vždy odvážime najprv so stredne ťažkým kamienkom zo zoradených. Takto zistíme, či nový kamienok patrí do ľavej časti radu, alebo do pravej. Potom ho odvážime so stredným kamienkom príslušnej časti radu. Atď.

Pre názornosť nech máme doterajšie poradie kamienkov B,C,A,D.
6. váženie: Kamienok E začneme porovnávať s jedným zo stredných kamienkov v doterajšom rade. Napríklad s C. Ak by E < C, stačilo by jedno ďalšie váženie E s B. V druhom (horšom prípade z hľadiska počtu vážení) ak E > C, budeme potrebovať ešte **7. a 8. váženie** (E s A, E s D) na presné zaradenie kamienka E na svoje miesto. Takto zistené poradie bude napríklad B,C,A,E,D. **9. váženie:** Nasleduje zaradenie kamienka F. Opäť začneme s vážením s doterajším prostredným kamienkom (v tomto prípade A). Zistíme, či ho treba ďalej vážiť (to bude **10. a 11. váženie**) s kamienkami B a C, alebo s kamienkami E a D. Po týchto váženiach máme zoradené kamienky napríklad B,F,C,A,E,D. **12. váženie:**

Postupujeme rovnako s kamienkom G. Po vážení s C zistíme, že G > C. **13. váženie:** G s E. Podľa výsledku potom bude **14. váženie** G s A, alebo G s D. Takto bude poradie 7 kamienkov B,F,C,A,E,D,G. **15. váženie** H so stredným (A), **16. váženie** podľa výsledku 15. váženia buď H s F (ak H < A), alebo H s D (ak H > A). **17. váženie:** odvážime H s posledným kamienkom podľa výsledkov 15. a 16. váženia. Napríklad ak bolo H < A a potom H > F, tak teraz sme odvážili H s C, aby sme zistili, či patrí medzi F a C alebo medzi C a A. **S istotou vieme určiť poradie 8 kamienkov na 17 vážení.**

Ak by sme sa nespoliehali na istotu podľa uvedeného postupu, mohlo by nám teoreticky stačiť 7 vážení, podobným postupom ako v príklade 9 na štyri kamienky 3 váženia. K tomu by sme však museli mať veľké šťastie. Najmenej potrebujeme 7 vážení (a šťastie), s istotou potrebujeme 17 vážení na určenie poradia kamienkov.

Príklad 11:



V tomto príklade mnohí z Vás zabudli, čo to znamená príklad vyriešiť. Znamená to nájsť všetky riešenia a vylúčiť všetky ostatné. Takže nájdeme riešenie: Torta je tvaru kruhu a my ju chceme rozdeliť na polovicu. Čo nás napadne – polomer, ktorý je osou súmernosti kruhu. Keďže každý polomer nám vyhovuje, je ideálne za bod určiť stred **S** torty, lebo každý polomer prechádza stredom a stredom prechádza len polomer. Teda panák poradí chlapcovi stred. A teraz vylúčime iné možnosti: Vezmime si ľubovolný bod okrem stredu, napr. bod **X**, ale môže to byť aj bod na okraji torty. Každým takýmto bodom dokážeme viesť rez tak, aby torta nebola predelená na dve rovnaké časti, teda bodom **X** režeme tak, aby rez nešiel stredom **S** . Potom dokážeme bodom **S** viesť rovnobežku s našim rezom. To znamená, že ak polomer (naša rovnobežka) delí tortu na dve rovnaké časti, nemôže ju deliť náš rez. A teda jediný bod, ktorý panák chlapcovi môže poradiť, je stred torty.

Príklad 12:

Najprv si zrátame maximálnu plochu, ktorú môžu pokryť vysielače, ak sa neprekrívajú. Plocha, ktorú pokryje jeden vysielač, je kruh s polomerom 80 km. Teda $s_1 = \Pi r^2 = 20096$. Celá plocha je potom 13 krát väčšia $s = 13.s_1 = 261248$ km^2, čo je menšia ako plocha krajiny (268 138 km^2). Z toho vyplýva, že pri ľubovolnom rozmiestnení vysielačov bude vždy aspoň 6890 km^2 nepokrytých signálom.