PIKOMAT
16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Príklad 1:

Pod "rozdelil v pomere 7:6:5" rozumieme, že záhradník si zobral celú kopu semienok (nech počet semienok je x), rozdelil ju na 7 + 6 + 5 = 18 častí a odložil si sedem častí pre prvý záhon 7x / 18, šesť častí pre druhý záhon 6x / 18 a päť častí pre tretí záhon 5x / 18. Pri druhom rozdelení záhradník dal všetky semienka naspäť dokopy a túto rozdelil na 6 + 5 + 4 = 15 dielikov. Záhony potom dostali 6x / 15, 5x / 15 a 4x / 15 semienok. Keďže delíme dvakrát tú istú kopu, raz na 15, raz na 18 častí, tak 1x / 18 sa nerovná 1x / 15.

Teraz sa pozrime, čo sa bude diať so záhonmi:

Záhon 1:
Pôvodne mal dostať 7x / 18 = 35x / 90, ale dostal 6x / 15 = 36x / 90. Takže toto nie je záhon, ktorý dostal o 120 semienok menej, než mal.

Záhon 2:
Pôvodne 6x / 18 = 1x / 3, ale dostal 5x / 15 = 1x / 3, z čoho je jasné, že záhon 3 mal pôvodne dostať o 120 semienok viac.

Záhon 3:
Pôvodne 5x / 18 = 25x / 90, dostal však len 4x / 15 = 24x / 90. Z toho dostávame rovnicu:
1x / 90 = 120, z čoho je jasné, že x = 10800 semienok mala celá kopa.
Takže prvý záhon mal dostať 7 / 18 * 10800 = 4200 semienok, druhý záhon mal dostať 6 / 18 * 10800 = 3600 semienok a tretí záhon mal dostať 5 / 18 * 10800 = 2880 semienok.

Príklad 2:

Najprv si bolo treba uvedomiť, že koncentrácia v percentách udáva pomer objemu hnojiva ku celkovému objemu tekutiny. Nech objem hnojiva bude H a celkový objem tekutiny (voda + hnojivo) bude V. Potom zadanie príkladu môžeme zapísať do rovníc.

H / (V + 1) = 0, 25 **(1)**
(H + 1) / (V + 1) = 0,375 **(2)**
(2) platí pretože keď pridáme hnojiva, pridáme rovnaké množstvo tekutiny ku celkovému objemu tekutiny.

Ak z rovníc (1) a (2) vyjadríme H dostaneme rovnicu
0,25 V + 0,25 = 0,375 V + 0,375 – 1 **(3)**
0,125 V = 0,875 **(4)**
Teda V = 7*l* **(5)**

Ak (5) dosadíme do rovnice (1) zistíme, že H = 0,25 (V + 1) = 0,25 . 8 = 2*l*
Pomer H / V udáva pôvodnú koncentráciu roztoku, číselne H / V = 2 / 7 (asi 28,57 %).

Príklad 3:

Tento príklad bodujeme pre každého účastníka tejto série, ktorý zaslal aspoň nejaké riešenie hocijakého príkladu, piatimi bodmi, lebo sme nedopatrením vynechali obrázok fontánky zo zadaní. Dúfame, že nám preto nezaspíte na vavrínoch a budete sa snažiť vyriešiť tento príklad v nasledujúcej sérii.

Príklad 4:

Postupujeme od konca

	Janko	Jožko	Ferko
Po 3. polož.	X	X	X
Po 2. polož.	X / 2	X / 2	2X = X + X / 2 + X / 2
Po 1. polož.	X / 4 = (X / 2) / 2	7X / 4 = X / 2 + X / 4 + X	X = 2X / 2
Na začiatku	13X / 8 = X / 4 + 7X / 8 + X / 2	7X / 8 = (7X / 4) / 2	X / 2

- 13X / 8, 7X / 8, X / 2 – sú celé čísla
- 150 < 3X < 168 Ţ 50 < X Ł 63

medzi 50 a 63 existuje jediné číslo deliteľné 8 Ţ X = 56 Ţ počet kamienkov na jednotlivých kôpkach na začiatku bol:
Janko: 13X / 8 = 13 . 56 / 8 = <u>91</u>
Jožko: 7X / 8 = 7 . 56 / 8 = <u>49</u>
Ferko: X / 2 = 56 / 2 = <u>28</u>

Príklad 5 (podľa Lenky Hurtovej):

Čokoláda …x Sk
Janko (1 Sk mu chýba) … má (x – 1) Sk
Ferko (9 Sk mu chýba) … má (x – 9) Sk
Spolu: … (x – 1) + (x – 9) Sk

(x – 1) + (x – 9) = 2x – 10

Keďže majú málo Sk na čokoládu platí:
2x – 10 < x
x < 10 Čokoláda stojí menej ako 10 Sk.

1 reálna cena, ktorá vyhovuje je 9,90 Sk

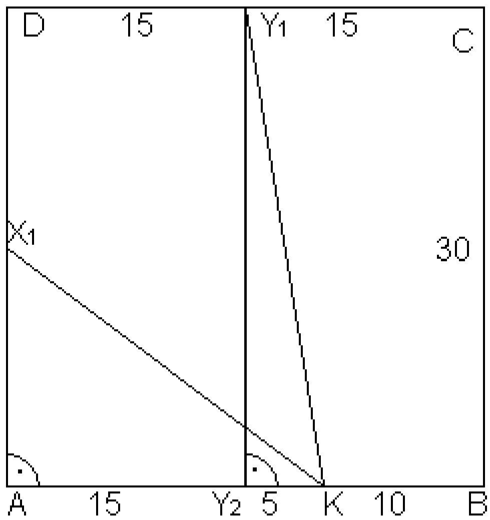
Urobme skúšku správnosti:
Janko má 9,90 – 1 = 8,90 Sk
Ferko má 9,90 – 9 = 0,90 Sk
Spolu: 8,90 + 0,90 = 9,80 < 9,90

Čokoláda môže stáť 9,90 alebo menej ako 9,90 ale viac ako 9 Sk.
Cena čokolády môže byť: 9,10; 9,20; … 9,90

Príklad 6:

Nech je obsah celého trojuholníka **S**, obsah trojuholníka = (základňa * výška na základňu) / 2, čiže **S** = (|AB| * v_a) / 2. Obsah S_{TY} znamená obsah časti Y. Označme si priesečník úsečky R_1S_1 a CS_2 ”X”. Najprv si uvedomíme, že body S_1 a S_2 delia úsečku AB na tri rovnako dlhé úsečky. Najprv si všimneme časť 1. Je to trojuholník so základňou 1/3 * |AB| a výškou rovnakou ako výška a stranu AB. Preto je obsah tejto časti S_{t1} = (1/3 * |AB| * v_a) / 2 = 1/3 * **S**. Takisto aj obsah trojuholníkov ΔS_1S_2C a ΔS_2BC (ich základňa je 1/3 z |AB| a výška = v_a). Teda S_{t2} + S_{t3} = 1/3 * **S** = S_{t4} + S_{t5} + S_{t6}. Zoberme si teraz časť 6. Je základňa je 1/3 * |AB| a jej výška je 1/3 z v_a, teda S_{t6} = (1/3 * |AB| * 1/3 * v_a) / 2 = 1/9 * **S**. Keď si zoberieme trojuholník ΔAS_2C, všimnite si, že bod S_1 rozdeľuje úsečku AS_2 na dve rovnako dlhé časti a úsečka S_1X je rovnobežná s úsečkou CA, čiže S_1X je stredná priečka trojuholníka ΔAS_2C, teda trojuholníky ΔS_1S_2X a ΔS_1XC majú rovnakú základňu S_1X a rovnakú výšku na základňu = 1/2 * výška na úsečku CA v trojuholníku ΔAS_2C. Z toho vyplýva, že časť 2 a 3 majú rovnaký obsah, S_{t2} = S_{t3}, čiže S_{t2} + S_{t3} = 2 * S_{t2} = 1/3 * **S**, z čoho dostaneme, že S_{t2} = S_{t3} = 1/6***S**. Teraz si uvedomíme, že |CX| = |XS_2| a |CR_1| = |R_1R_2| a |Ð XCR_1| = |Ð S_2CR_2|, teda trojuholníky ΔXR_1C a ΔS_2R_2C sú podobné a S(ΔXR_1C) = 1/4 * S(ΔS_2R_2C) a S_{t4} = 1/3 * S_{t5}. Zo vzťahu S_{t4} + S_{t5} + S_{t6} = 1/3 * **S** dostaneme dosadením za S_{t6} S_{t4} + S_{t5} = 2/9 * **S** = S_{t4} + 3 * S_{t4} = 4 * S_{t4}. Z toho dostaneme S_{t4} = 1/18 * **S** a S_{t5} = 1/6 * **S**. A tým už máme vyjadrený obsah všetkých častí vzhľadom na obsah celého trojuholníka.

Príklad 7:



Body X a Y ležia v stredoch stien, body X a Y sú teda v rovnakej výške (15 cm). Keď spustíme z týchto 2 bodov kolmice (z bodu X na AD, z bodu Y na CD) dostaneme body X_1, Y_1, ktoré budú v stredoch hrán AD a CD. Trojuholník ADX je rovnoramenný. $|XA| = |XD|$ a $|$Ð $XAX_1| = |$Ð $XDX_1| = 45°$ a $|$Ð $AX_1X| = |$Ð $DX_1X| = 90°$ $|$Ð $AXX_1| = |$Ð $DXX_1|$ $= 45°$ podľa vety sú trojuholník AX_1X a trojuholník DX_1X zhodné, $|AX_1| + |DX_1| = 30$ cm, $|AX_1| = |DX_1| = 15$ cm , $|XX_1| = |YY_1| = 15$ cm. Trojuholník KX_1X a trojuholník KY_1Y sú pravouhlé XX_1 je kolmé na podstavy ABCD, podobne YY_1.

Môžeme teda využiť Pytagorovu vetu $c^2 = a^2 + b^2$ (c – prepona, a, b – odvesny).Platí teda: $|XK|^2 = |XX_1|^2 + |X_1K|^2$, $|YK|^2 = |YY_1|^2 + |Y_1K|^2$. Vieme, že $|XX_1| = |YY_1|$, stačí nám teda zistiť a porovnať dĺžky $|X_1K|$, $|Y_1K|$. To vypočítame z pravouhlých trojuholníkov: z trojuholníka KAX_1 a z trojuholníka Y_1Y_2K (Y_2 = stred AB : úsečka Y_1Y_2 je kolmá na AB, $Y_1Y_2 \parallel CB$, dostaneme obdĺžnik Y_1Y_2BC a teda $|Y_1Y_2| = 30$ cm).

Podľa Pytagorovej vety platí:
$|X_1K|^2 = |AX_1|^2 + |AK|^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, $|X_1K| = 25$
$|Y_1K|^2 = |Y_1Y_2|^2 + |Y2K|^2$ ($|Y_2K| = |Y_2B| - |Y_2K| = 15$ cm – 10 cm = 5 cm.
$|Y_1K|^2 = 30^2 + 5^2 = 925$, $|Y_1K| = \sqrt{925}$

Porovnaním je jasné, že $|Y_1K| > |X_1K|$ a teda aj $|YK| > |XK|$.

Príklad 8:

Napíšme si reťaz: 200 – 199 + 198 - … - 3 + 2 – 1
Ďalej si ju môžeme upraviť: (200 – 199) + (198 - 197) + … + (4 - 3) + (2 - 1)
čo sa rovná súčtu 100 dvojíc, ktoré sú rovné 1. Čiže súčet celej reťaze je rovný 100. Keď chceme umiestniť ľavú zátvorku, musíme si uvedomiť, že ak pred ňou bude znamienko +, výsledok sa nezmení, bude stále rovný 100. Takže ju dajme pred nejaké číslo x, pred ktorým je znamienko – (čiže x musí byť nepárne).

Zapíšme si to aj so zátvorkou:
200 – 199 + 198 - … + [x + 1] – (x + [x - 1] - … - 3 + 2 - 1)
Tento zápis si môžeme upraviť spôsobom, že zátvorku posunieme o jedno miesto doprava – aby sa nám lepšie počítalo, pričom výsledok bude rovnaký, ale musíme pamätať, že vo výsledku bude zátvorka pred číslom x, nie x - 1, čiže:
200 – 199 + 198 – … + [x + 1] – x – ([x - 1] + … + 3 – 2 + 1)

Toto môžeme znova rozdeliť na dvojice:
(200 - 199) + (198 - 197) + … + ([x + 1] - x) - (([x – 1] – [x – 2]) + … + (4 - 3) + (2 - 1))

V zátvorke máme (x - 1) / 2 dvojíc, čiže súčet v zátvorke (aj s mínusom pred zátvorkou) je -(x - 1) / 2. Pred zátvorkou je zvyšných 100 – (x – 1)/2 dvojíc, keďže spolu máme 100 dvojíc. Celkový súčet má byť 73 alebo 72. Skúsme to teda dosadiť.

100 – (x – 1) / 2 = súčet pred zátvorkou
-(x - 1) / 2 = súčet v zátvorke
100 – (x - 1) = celkový súčet (73 alebo 72)
100 – (x - 1) = 73

100 – x + 1 = 73
101 – x = 73
28 = x

Ale sme si povedali, že x má byť nepárne číslo, takže táto úloha nemá riešenie.
100 – (x - 1) = 72
100 – x + 1 = 72
101 – x = 72
29 = x

V tomto prípade to sedí a zátvorku teda dáme pred číslo 29. Skúška:
200 – 199 + 198 - … + 30 – (29 + 28 - … - 3 + 2 - 1) = (200 – 199) + (198 – 197) + … + (30 – 29) – [(28 - 27) + … + (4 – 3) + (2 – 1)]

86 dvojíc
14 dvojíc
(spolu 100 dvojíc), 86 – 14 = 72

Príklad 9:

pab Ł $a^2 + b^2$ / -pab (1)

0 Ł $a^2 + b^2$ – pab (2)

Táto nerovnosť pripomína nerovnosť 0 Ł $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ (3).

Teda riešením bude p = 2. Keby sme zobrali p < 2, potom p = 2 - k (k je kladné číslo). Dostali by sme nerovnosť 0 Ł $a^2 + b^2 - (2 - k)ab = a^2 + b^2 - 2ab + kab = (a - b)^2 + kab$. **0 Ł $(a - b)^2$** platí z nerovnosti (3) a **0 Ł kab** (k, a, b sú kladné), teda **0 Ł $(a - b)^2$ + kab**. Keby sme zobrali p > 2, potom p = 2 + k (kde k je kladné číslo). Dostali by sme nerovnosť 0 Ł $a^2 + b^2 - (2 + k)ab = a^2 + b^2 - 2ab - kab = (a - b)^2 - kab$. Keďže **0 Ł $(a - b)^2$** platí s nerovnosti (2) a **0 ł kab** (k, a, b sú kladné), teda **0 Ł $(a - b)^2$ + kab** nemusí platiť pre nejaké a, b. Jednoduchým príkladom je a = b = 1, p > 2 potom $(a - b)^2 = (1 - 1)^2 = 0$ a kab = k. Kde k je kladné číslo. Nerovnosť 0 Ł 0 - k neplatí a neplatí ani nerovnosť (1).

Nerovnosť (1) platí pre p Ł 2.

Príklad 10:

a ♦ b = ab / (a + b)
(x ♦ 2) ♦ x = -6

$$\frac{\frac{2x}{x+2}.x}{\frac{2x}{x+2}+x} = -6$$

x ą 0, x ą -2, x ą -4

$$\frac{\frac{2x.x}{x+2}}{\frac{4x+x^2}{x+2}} = -6$$

$$\frac{2x.x}{x+2}.\frac{x+2}{4x+x^2} = -6$$

$$\frac{2x.x}{x(4+x)} = -6$$

2x = -6 . (4 + x)
2x = -24 - 6x
8x = -24
x = -3

Príklad 11:

a ♦ b = ab – ha – hb + 16
(3 ♦ x) ♦ (3 ♦ x) = 0
(3 ♦ x) = 3x – 3h – hx + 16 = h – x

(h – x) ♦ (h – x) = 0
(h – x)(h – x) – h(h – x) – h(h – x) + 16 = 0

$16 - 8x + x^2 - 16 + hx - 16 + hx + 16 = 0$
$x^2 = 0$
$x = 0$

Príklad 12:

Máme úsečku dlhú 8 cm. Potrebujeme úsečky dĺžok 13, 14 a 15 cm. Najjednoduchšie ich nájdeme takto: Nájdeme stred úsečky dlhej 8 cm. Urobíme to tak, že z oboch krajných bodov úsečky kružidlom narysujeme kružnicové oblúky tak, aby sa nám pretli v dvoch bodoch. (kružnice musia mať polomer odhadom väčší než je polovica úsečky, inak by sa oblúky nepretli) Keď potom tieto vzniknuté body spojíme priamkou, pretne sa táto priamka s našou pôvodnou úsečkou presne v jej strede. Takto naisto dostaneme dve úsečky s dĺžkou 4 cm. Podobne z týchto úsečiek dostaneme úsečky s dĺžkami 2 cm a 1 cm. A to už máme všetko potrebné. Teraz si už len narysujeme tri polpriamky, na ktoré za sebou nanášame potrebné dĺžky.

13 cm = 8 cm + 4 cm + 1 cm
14 cm = 8 cm + 4 cm + 2 cm
15 cm = 8 cm + 4 cm + 2 cm + 1 cm

Máme teda úsečky s potrebnými dĺžkami, musíme už len narysovať trojuholník. Narysujeme si polpriamku a na ňu prenesieme jednu z úsečiek, nech je to úsečka s dĺžkou 13 cm. Do jedného z jej krajných bodov nanesieme oblúk s polomerom 14 cm a do druhého krajného bodu oblúk s polomerom 15 cm. Kde sa nám oblúky spoja, tam je tretí vrchol hľadaného trojuholníka. A máme ho!