PIKOMAT
16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Príklad 1:

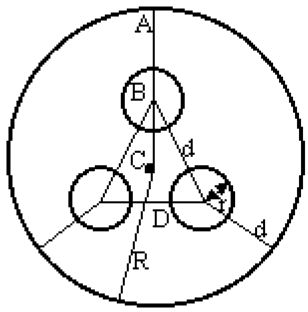
Budeme vychádzať zo vzorca *čas = dráha / rýchlosť*. Označme si čas t_1 = cesta na výlet, čas t_2 = cesta z výletu, s = dĺžka celej cesty, v_1 = rýchlosť autobusu, v_2 = rýchlosť Andreja . Vieme, že $4t_1 = t_2$, lebo cesta späť trvala štyrikrát dlhšie. Dosadíme za $t_1 = s / v_1$. Cestou späť išli ľ cesty autobusom a ¼ cesty pešo, preto $t_2 = (¾s) / v_1 + (¼s) / v_2$, teda $s / v_1 = (¾s) / v_1 + (¼s) / v_2$. Po upravení výrazu dostaneme $13.v_2 = v_1$, čiže autobus je 13-krát rýchlejší ako Andrej s rodičmi.

Príklad 2:

Mali sme násobiť dve dvojciferné čísla- označme si ich A, B = 10c + d (c, d sú cifry čísla B). Chybné násobenie vlastne znamená, že číslo A násobíme najprv číslom d, potom číslom c a dve získané čísla potom sčítame. Pri takomto násobení dostal Andrej výsledok 1404. Keď to zapíšeme: **A.d + A.c = A.(d + c) = 1404**. To znamená, že číslo 1404 má byť súčinom čísla A (**A je dvojciferné číslo**) a čísla d + c (d, c sú jednociferné čísla, pre ich súčet musí platiť **0 < c + d < 19**). Úlohu si môžeme ešte zjednodušiť tým, že zistíme aký najmenší môže byť súčet c+d, ak A bude dvojciferné číslo. A.(c+d)=1404, čím väčšie bude A, tým menšie bude c+d. Najväčšie možné A je 99, teda najmenšie možné c+d bude: 1404 : 99 = 14,18. Stačí nám zistiť, **či je 1404 deliteľné číslami od 15 do 18**. Veľmi jednoducho zistíme, že 1404 je deliteľné iba 18-timi (**1404 : 18 = 78**). Číslo 18 má byť súčtom dvoch jednociferných čísel (c+d)a to je možné iba ak c = 9 a d = 9. Číslo 78 je hľadané A. Do úvahy teda prichádza jediná možnosť, že Andrej mal vynásobiť čísla 78 a 99. Výsledok správneho násobenia je **78 . 99=7722**.

Príklad 3:

Najprv si treba uvedomiť, že polomer fontány R sa rovná dĺžke úsečky AC a teda súčtu dĺžok úsečiek AB a BC. Dĺžku úsečky AB už poznáme, je to **d**. Teda už nám zostáva vyjadriť len dĺžku úsečky BC pomocou **d**. Všimnime si teraz trojuholník vytvorený stredmi malých kruhov – je rovnostranný. To znamená, že jeho výška BD je zároveň aj ťažnica. Preto dĺžka BD = √3/2.**d**. Zo súmernosti obrázku vyplýva, že stred fontány je zároveň aj ťažiskom nášho trojuholníka. Ako väčšina z Vás by mala vedieť, ťažisko delí ťažnicu v pomere 2:1. Teda dĺžka úsečky BC = 2/3.BD = 2/3. √3/2.**d** = √3/3.**d**. Teraz už môžeme zostrojiť rovnicu



R = √3/3.**d** + **d**, z ktorej ľahko vyjadríme d = (3 / (√3 + 3)).R = ((3 - √3) / 2).R.

Príklad 4:

Úloha sa dala riešiť dvomi spôsobmi:

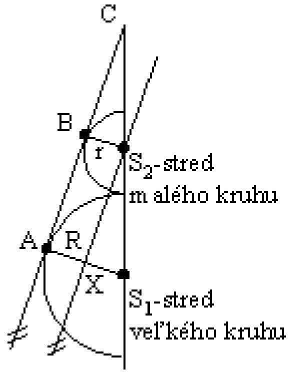
1. Prívesok sa skladá z dvoch <u>plných</u> kruhov.

V tomto prípade je pomer hmotností (ktoré poznáme) rovný pomeru druhých mocnín polomerov kruhov. • - malého kruhu a ⬤ - veľkého kruhu.

Hmot.• / hmot.⬤ = (polomer•)^2 / (polomer⬤)^2 → $m_1 / m_2 = r^2 / R^2$ Ţ 25g / 100g = $r^2 / 4^2$.

Potom r → polomer • = 2cm. Nakreslíme si obrázok a dosadíme dĺžky známych úsečiek (stačí so načrtnúť polovicu prívesku) : r = 2 cm, R = 4 cm. Na úsečku S_1A nanesieme dĺžku r=2 cm (označíme X). Spojíme S_2 a X, AB je rovnobežná s XS_2. Porovnáme CBS_2 a CAS_1.

Tieto dva trojuholníky majú rovnaký uhol ACS_1, uhol CBS_2 a CAS_1 (90°) a spoločné polpriamky CB (CA) a CS_2 (CS_1) Ţ trojuholníky CBS_2 a CAS_1 sú podobné trojuholníky. Pomer ich veľkostí zistíme z r (BS_2) a R (AS_1). r / R = 2 / 4 = 1 / 2. Úsečka AB je k úsečke AC tiež v pomere 1 : 2, čiže úsečka AB je polovica z úsečky AC.



2. Prívesok sa skladá z dvoch kružníc:

V tomto prípade vypočítame pomer malej kružnice k veľkej takto:

m1 / m2 = r / R, hmotnosť • / hmotnosť ● = (polomer •) / (polomer ●) → 25g / 100g = r / 4 cm Ţ r = 1 cm.

Polomer menšej kružnice je 1 cm. Môžeme si načrtnúť podobný obrázok ako v prvom prípade, ale namiesto r = 2cm dosadíme r = 1cm. Vyjde nám aj iný pomer podobnosti trojuholníkov: $AS_1C : BS_2C = 4 : 1$ (lebo $AS_1 / BS_2 = 4 / 1$), z čoho vyplýva, že úsečka AB je ¾ z úsečky AC.

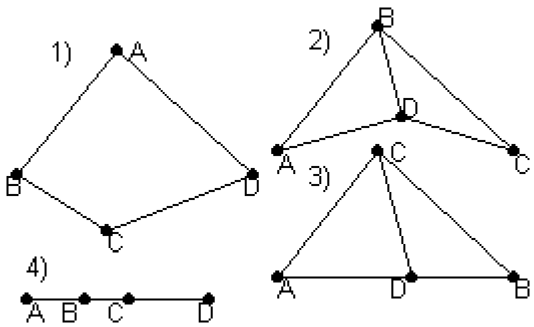
Príklad 5:

V prvom rade si treba uvedomiť, čo od nás zadanie chce. Dokázať znamená ukázať, že nech sú body rozložené **akokoľvek**, **vždy** určujú aspoň jeden pravý alebo tupý uhol.

Pravý uhol má 90˚, tupý uhol je väčší ako 90˚ **a menší ako 180˚.**

Teraz sa pozrime, aké rôzne polohy môžu mať 4 body:

1. konvexný štvoruholník
2. nekonvexný štvoruholník
3. trojuholník, 4. bod (D) je na niektorej jeho strane
4. úsečka (všetky štyri body sú na priamke)



Takže pre každú z týchto polôh musíme ukázať, že body vytvárajú tupý alebo pravý uhol.

1. V konvexnom 4-uholníku (ako v každom 4-uholníku) je súčet vnútorných uhlov 360˚. V konvexnom 4-uholníku sú všetky vnútorné uhly menšie ako 180˚. Takže tieto uhly sú buď ostré alebo pravé alebo tupé. Keby boli všetky 4 uhly ostré (menšie ako 90˚), ich súčet by bol menší ako 4x90˚=360˚, čo však nemôže nastať, lebo súčet uhlov v štvoruholníku je 360˚. Takže nie všetky uhly sú ostré, všetky sú menšie ako 180˚ a teda aspoň jeden z nich je pravý alebo tupý.
2. Pozrime sa na bod D, pri ktorom je vnútorný uhol 4-uholníka nekonvexný. Ak ho spojíme s protiľahlým vrcholom B, rozdelíme uhol <CDA na dva (<CDB a <ADB), ktorých súčet je väčší ako 180˚. Pritom oba tieto uhly sú menšie ako 180˚. Ak by boli obidva ostré, ich súčet by nebol väčší ako 180˚, čo je spor. Takže aspoň jeden je pravý alebo tupý.
3. Priamy uhol <ADB je rozdelený úsečkou DC na dva susedné uhly, ktorých súčet je 180˚. Tie sú buď obidva pravé alebo je jeden ostrý a jeden tupý.
4. Uhly <BAC, <BAD, <CAD, <ACB, <ADB, <BCD majú veľkosť 0˚, uhly <ABC, <ABD, <ACD, <BCD sú priame. Ani jeden uhol nie je pravý ani tupý.

Záver: Tvrdenie neplatí (platí vo všetkých prípadoch s výnimkou prípadu 4).

Príklad 6:

Tento príklad sa dal riešiť dvoma spôsobmi. Aby si každý našiel v tom, čo tu prečíta, to, o čo sa pokúšal, uvediem obidva spôsoby riešenia.

Prvý spôsob:

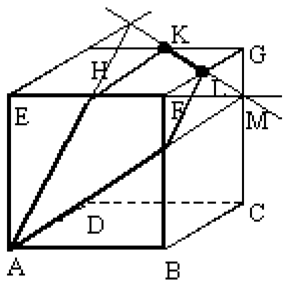
Čísel od 10 po 99 je presne 81, z toho 41 je párnych a 40 je nepárnych. Urobme také malé pozorovanie: Keď sčítame ľubovoľné dve párne čísla z našich 81 (ale aj z ľubovoľnej inej množiny čísel), dostaneme párne číslo, počet nepárnych čísel sa v množine <u>nemení</u>. Keď sčítame dve nepárne čísla, dostaneme opäť párne, ale počet nepárnych čísel <u>klesne o</u>

dve. A nakoniec ak sčítame párne s nepárnym, dostaneme nepárne, pričom počet nepárnych čísel sa v našej množine nezmení. Čo sa robí s počtom párnych nás nemusí zaujímať, keď si všimneme, že počet nepárnych nám klesá vždy po dvoch. A keďže počet nepárnych je párne číslo, bude nám tento klesať po dvoch až na nulu. A teda výsledné číslo bude jasne párne, preto hru vždy vyhrá Lacko.

Druhý spôsob:
Ak sčítavame dve čísla, mažeme ich a zapisujeme ich súčet na koniec radu, a toto opakujeme, dokým neostane jedno číslo, urobíme vlastne súčet všetkých čísel tohto radu, ibaže v rôznom poradí. To nám však nemusí vadiť, lebo sčítanie je asociatívne, čo znamená, že nezáleží na poradí sčítavania sčítancov, výsledok je vždy rovnaký. (Príklad: 1 + 3 + 6 = 3 + 1 + 6 = 6 + 3 + 1 = 10). Teda to platí aj pre naše čísla, ich súčet je 4050, čo je párne a preto hru vždy vyhrá Lacko.

Príklad 7:

Čo potrebujeme je trocha priestorovej predstavivosti. Na stenách kocky chceme nájsť úsečky, ktoré nám ukážu, ako sa kocka "oddelí" po rozrezaní rovinou idúcou bodmi A, K a L. V stene EFGH je to najjednoduchšie, pretože spojením bodov K a L dostaneme úsečku, ktorá ukazuje rez.



Ak si túto úsečku predĺžime na priamku nájdeme bod, kde sa pretne s priamkou EF. Označme ho M. Tento bod leží v rovine, v ktorej leží aj stena ABFE. To znamená, že ak bod M spojíme s bodom A, dostaneme rez v stene ABFE. Kde sa priamka LM pretne s priamkou BF vznikne bod N, pričom úsečka LN je rez v stene BCGF. Bod O vznikne ako priesečník priamok KL a EH. Spojením bodov O a A dostaneme rez v stene ADHE, pričom priesečník priamky OA s úsečkou DH označíme P a bodmi P a K pôjde rez stenou DCHG.

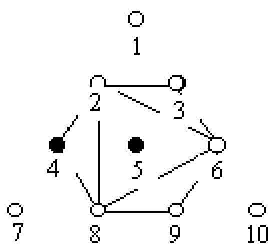
POZOR! To, že body M a L sú rovnako vzdialené od bodu F platí len v zvláštnych prípadoch.

Príklad 8:

Porátajme najprv všetky záhrady. Budeme ich rátať podľa riadkov a stĺpcov, ktoré "obsadzujú". Čo to znamená, to sa hneď dozviete. Zoberme si napr. záhradu na štvorčekoch A1, A2, A3, B1, B2, B3. Táto obsadzuje riadky A a B a stĺpce 1, 2 a 3. Teda "obsadzovať" znamená "vyskytovať sa v nich". Poďme teraz už na rátanie. Záhrady môžu obsadzovať iba jeden riadok, alebo dva, tri a štyri pod sebou ležiace riadky. Samostatné riadky sú štyri, dvojice riadkov sú tri, trojice dve a štvorica riadkov je len jedna. Teda čo sa týka riadkov, záhrady majú na výber 4 + 3 + 2 + 1 = 10 rozložení. Podobne je to so stĺpcami, kde rozložení je 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. Na každé rozloženie riadkov môže pripadnúť každé z rozložení stĺpcov, preto záhrad je dokopy 21 . 10 = 210.

Teraz porátame záhrady so studňou. Urobíme to takým istým spôsobom, ibaže vynecháme tie riadkové aj stĺpcové rozloženia, ktoré neobsahujú studňu. Teda ak záhrada obsadzuje len jeden riadok, môže to byť iba riadok C, ak obsadzuje dva riadky, má na výber z dvoch možností, pre trojriadkové obsadenie má opäť len dve možnosti a štvorriadkové rozloženie existuje iba jedno. So stĺpcami je to podobne: Môžeme mať iba jediné jednostĺpcové rozloženie, po dve dvojstĺpcové, trojstĺpcové, štvorstĺpcové a päťstĺpcové rozloženia a jedno šesťstĺpcové. Teda záhrad so studňou je (1 + 2 + 2 + 1) . (1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1) = 6 . 10 = 60.

Príklad 9:



Žiarovky 4 a 5 sú vypálené, tie svietiť nebudú. Potom však musia svietiť žiarovky 2 a 8. Ak svietia 2 a 8, nesmie svietiť 6 – mnohí z Vás si nevšimli práve tento rovnostranný trojuholník.

Takže zatiaľ svietia 2,8, nesvietia 4,5,6. Keď nesvietia 5,6, musí svietiť 3 aj 9. Žiarovka 1 však nemôže svietiť, lebo svietia 2 a 3. Na druhej strane musí svietiť, lebo 4 a 6 nesvietia. Žiaľ, také rozsvietenie neexistuje.

Príklad 10:

V postupnosti AEACBDCB máme dve písmenká A. Písmena A sa môžeme zbaviť iba tak, ak zameníme ABC na B. Takže zámenu ABC budeme musieť vykonať dvakrát. Raz budeme musieť zameniť EBD na B (písmeno E sa dá zameniť iba spolu s písmenami B a D). Pri zámene ABC na B aj pri zámene EBD na B zmenšíme počet písmen v postupnosti o 2. Zostanú nám teda 2 písmená, ktoré ak chceme zameniť na B, musia byť

práve BB (toto je jediná zámena, pri ktorej znižujeme počet písmen z dvoch na jedno). Teraz nám už len stačí vhodnou kombináciou takých zámien pri ktorých sa neznižuje počet písmen (CB na BC a DB na BD) vytvoriť vhodné trojice alebo dvojice v postupnosti. Riešení je niekoľko. Jedno z nich je rozpísané vpravo.

AEACBDCB
AEA**BC**DCB
AE**B**DCB
A**B**CB

Postupnosť AEACBDCB sa pravidlami uvedenými v zadaní dá zameniť na písmeno B. **B**B
B

Príklad 11:

Každé z 1999-tice rôznych čísiel vieme zapísať ako $1998k_i + z_i$, 0 Ł z_i Ł 1997, 1 Ł i Ł 1999, k_i, $z_i \in Z$. Existuje 1998 zvyškov po delení číslom 1998 (0, 1, …, 1997). My máme čísel 1999, a teda minimálne 2 z tejto 1999-tice čísel dáva rovnaký zvyšok po delení 1998. Nech je to $z_a = z_b$ Ţ $z_a - z_b = 0$. Rozdiel dvoch čísel vieme napísať ako $(1998k_a + z_a) - (1998k_b + z_b) = 1998k_s + z_a - 1998k_b - z_b = 1998.(k_a - k_b) + (z_a - z_b) = 1998.(k_a - k_b)$. Čím je úloha dokázaná.

Príklad 12:

NSD(a, b) = 3
NSN(a, b) = 75a
a + b = 27

Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je vlastne ich súčin vydelený ich najväčším spoločným deliteľom. Preto môžeme napísať sústavu rovníc:

a + b = 27
75 - a = ab / 3

Vyriešením tejto sústavy dostaneme čísla a, b. Tak poďme na to: z prvej rovnice vyjadríme a, dosadíme ho do druhej a vypočítame b.

$a = 27 - b$
$75 - (27 - b) = (27 - b) . b / 3$
$225 - 81 + 3b = 27b - b^2$
$b^2 - 24b + 144 = 0$
$(b - 12)^2 = 0$
$b = 12$

Pomocou rovnice a = 27 - b vyrátame, že a = 12. A máme to. Je to jediné riešenie tejto sústavy a teda jediné riešenie príkladu.